UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

DESIGUALDADES ÓTIMAS E O PROBLEMA DE BREZIS-NIRENBERG

Marcos Vinícius dos Santos

Curitiba-PR
2010

DESIGUALDADES ÓTIMAS E O PROBLEMA DE BREZIS-NIRENBERG

por

Marcos Vinícius dos Santos

sob orientação do

Prof. Jurandir Ceccon

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Curitiba-PR

2010

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer à minha família pelo apoio incondicional, mesmo nos momentos de minha ausência. Em especial à minha Mãe, Vera Lúcia dos Santos, por acreditar sempre no meu potencial e ao meu Tio, professor Carlos Henrique dos Santos, o Carlão, que sempre me ajudou no que foi preciso.

Agradeço também aos colegas de Pós-Graduação pelo constante auxílio e grandes momentos de descontração.

Finalmente, e não menos importante, agradeço ao meu orientador, professor Jurandir Ceccon, não só pela habilidade com que conduziu esta orientação, mas principalmente pela paciência e pelo incentivo nos momentos mais difíceis, não medindo esforços para me ajudar na conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a desigualdade homogênea ótima de Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant A(p,q,N,f)\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u) dx\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx\right)^{\frac{1-\theta}{q}},$$

onde $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função p-homogênea, convexa, par e positiva. Obtemos como caso limite desta desigualdade a desigualdade homogênea logarítmica ótima de Sobolev

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \log |u|^p dx \leqslant \frac{N}{p} \log\left(\mathcal{A}(p,N,f)\int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u) dx\right).$$

Como um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos a desigualdade ótima de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leqslant A(2,N)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Usando uma função extremal para esta desigualdade provamos a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{2^*-1} + \lambda u, & \text{em} & \Omega, \\ u &> 0, & \text{em} & \Omega, \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

que é conhecido como problema de Brezis-Nirenberg.

Palavras-chave: desigualdades homogêneas, constante ótima de Sobolev, concentração de compacidade e problema de Brezis-Nirenberg.

Abstract

In this work we study the homogeneous inequality optimal Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant A(p,q,N,f)\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u)dx\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx\right)^{\frac{1-\theta}{q}},$$

where $f:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a p-homogeneous, convex, even and positive function. We obtain as limit case of this inequality, the homogeneous optimal logarithmic Sobolev inequality

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \log |u|^p dx \leqslant \frac{N}{p}\log\left(\mathcal{A}(p,N,f)\int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u)dx\right).$$

As a special case of Gagliardo-Nirenberg inequality, we have the optimal Sobolev inequality

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leqslant A(2,N)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

where $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Using an extremal function for this inequality, we prove the existence of solution to the problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{2^*-1} + \lambda u, & \text{em} & \Omega, \\ u &> 0, & \text{em} & \Omega, \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

known as a problem of Brezis-Nirenberg.

Keywords: homogeneous inequalities, optimal Sobolev constant, concentration compactness, and problem of Brezis-Nirenberg.

Sumário

Introdução

Em 2003, Del Pino e Dolbeault [8] estabeleceram para $1 < p < N$, a desigualdade ótima de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u\|_r \leqslant A(p,q,N)\|\nabla u\|_p^\theta \|u\|_q^{1-\theta}, \tag{1}$$

para toda $u \in \mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{R}^N)$ (completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ na norma $\|\nabla u\|_p + \|u\|_q$), onde

$$p \leqslant q \leqslant \frac{p(N-1)}{N-p},\ r = \frac{p(q-1)}{p-1},\ \theta = \frac{N(q-p)}{\big(Np-(N-p)q\big)(q-1)} \tag{2}$$

e

$$A(p,q,N) = \left(\frac{q-p}{p\pi^{\frac{1}{2}}}\right)^\theta \left(\frac{pq}{N(q-p)}\right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\frac{Np-q(N-p)}{pq}\right)^{\frac{1}{r}} \times$$
$$\times \left(\frac{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})\Gamma(\frac{N}{2}+1)}{\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{Np-q(N-p)}{q-p})\Gamma(\frac{N(p-1)}{p}+1)}\right)^{\frac{\theta}{N}}. \tag{3}$$

Além disso, as funções extremais para (1) (funções não nulas de $\mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{R}^N)$ que fazem com que (1) vire igualdade) são dadas por

$$u(x) = \alpha w(\beta(x-x_0))$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$, onde

$$w(x) = \big(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\big)^{-\frac{p-1}{q-p}}.$$

Para o caso que $q = \frac{(N-1)p}{N-p}$, obtemos da desigualdade (1) a desigualdade ótima de Sobolev

$$\|u\|_{p^*} \leqslant A(p,N)\|\nabla u\|_p, \tag{4}$$

para toda $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ na norma $\|\nabla u\|_p + \|u\|_{p^*}$), onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$ e

$$A(p,N) = \frac{p-1}{N-p}\left(\frac{N-p}{N(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(\frac{N}{p})\Gamma(N+1-\frac{N}{p})\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}. \tag{5}$$

Além disso, a desigualdade (4) satisfaz a igualdade quando

$$u(x) = \alpha w(\beta(x-x_0))$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$, onde

$$w(x) = \left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{N}{p^*}}.$$

A desigualdade ótima de Sobolev foi estudada de modo independente por Aubin [2] e Talenti [17] em 1976.

No Capítulo 2 desta dissertação, provaremos a validade da desigualdade homogênea ótima de Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant A(p,q,N,f)\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u) dx\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx\right)^{\frac{1-\theta}{q}}, \tag{6}$$

com $1 < p < N$, onde q, r, θ são conforme (2) e $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função p-homogênea, convexa, par e positiva. O caminho seguido por Del Pino e Dolbeault [8] consiste em utilizar técnicas do método variacional, resultado de simetria para um problema envolvendo o p-Laplaceano e unicidade de soluções radiais de equações de Euler-Lagrange de problemas variacionais relacionados. Para nosso propósito, não podemos usar o método usado em [8], pois nossa função f, em geral, não é radial. Para superar esta dificuldade, usaremos elementos da teoria do transporte de massa, um resultado devido a Brenier [3] e posteriormente refinado por McCann [14]. A técnica do transporte de massa foi empregada pela primeira vez no estudo da desigualdade ótima de Gagliardo-Nirenberg por Cordero-Erausquin, Nazaret e Villani [7] em 2004, generalizando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg provada em [8]. Além disso, vamos obter como um caso limite de (6) a desigualdade homogênea logarítmica ótima de Sobolev

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \log |u|^p dx \leqslant \frac{N}{p} \log \left(\mathcal{A}(p,N,f) \int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u) dx \right),$$

no mesmo sentido de Gentil [11], Del Pino e Dolbeault [8], cuja constante ótima é dada por

$$\mathcal{A}(p,N,f) = \frac{p^{p+1}}{N e^{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-f^*(x)} dx \right)^{-\frac{p}{N}}.$$

Um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg é a desigualdade ótima de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \leqslant A(2,N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com $N \geqslant 3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere agora o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{rclll} -\Delta u & = & u^{2^*-1} + \lambda u, & \text{em} & \Omega, \\ u & > & 0, & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0, & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{array} \right. , \tag{8}$$

Usando funções extremais para a desigualdade (7) provaremos a existência de solução para o problema (8). Este problema foi estudado pioneiramente em [5] e ficou conhecido como problema de Brezis-Nirenberg. Soluções de (8) correspondem a pontos críticos não triviais do funcional

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega u^2 \, dx$$

sobre a esfera $\|u\|_{2^*} = 1$. Porém, existe uma séria dificuldade para encontrar pontos críticos para o funcional Φ utilizando o método variacional padrão, uma vez que a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$ não é compacta. Para contornar essa situação, utilizaremos no Capítulo 3 desta dissertação, uma versão do lema de concentração de compacidade provado por Lions em [13].

Quando $N \geqslant 4$, o problema (8) possui uma solução para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor do Laplaceano, e o problema não possui solução se $\lambda \notin (0, \lambda_1)$ e Ω é estrelado.

Quando $N = 3$ o problema (8) é mais *sutil* e temos uma solução completa somente quando Ω é uma *bola*.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Este capítulo contém uma breve apresentação de alguns conceitos e resultados que serão necessários para a compreensão do restante do trabalho. Estamos interessados em introduzir resultados importantes da Teoria da Medida, Análise Funcional e Espaços de Sobolev, instrumentos de grande importância no estudo das equações diferenciais parciais (EDP's). O principal objetivo deste capítulo será reunir resultados clássicos a fim de facilitar a leitura dos capítulos seguintes. Desta forma omitiremos a maioria das demonstrações.

Vejamos alguns resultados clássicos dos espaços L^p. Usaremos ao longo do texto o símbolo Ω para denotar um conjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.1. *Sejam $(u_m) \subset L^p(\Omega)$ uma sequência e $u \in L^p(\Omega)$ uma função tais que $\|u_m - u\|_p \to 0$. Então existe uma subsequência (u_{m_k}) tal que:*

(a) *$u_{m_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω;*

(b) *$|u_{m_k}(x)| \leqslant h(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.t.p. em Ω, com $h \in L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Consulte [4]. $\square$

Teorema 1.2. *(Brezis-Lieb) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ não-vazio, $1 < p < \infty$ e (u_m) uma seqüência em $L^p(\Omega)$ tal que*

1. $\|u_m\|_{L^p(\Omega)} < M$ *para algum* $M \in \mathbb{R}$;

2. $u_m \to u$ *q.t.p. em* Ω.

Então,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\|u_m\|^p_{L^p(\Omega)} - \|u_m - u\|^p_{L^p(\Omega)}\right) = \|u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Definição 1.1. *Sejam* $0 < \gamma \leqslant 1$ *e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

(i) *Dizemos que* u *é Hölder contínua com expoente* γ *se existir uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c|x - y|^\gamma, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

(ii) *Se* u *é limitada e contínua, então definimos:*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\Omega}\{|u(x)|\}.$$

(iii) *A semi-norma de Hölder de ordem* γ *da função* u *é definida por:*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)} := \sup_{x\neq y}\left\{\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}\right\}.$$

Observe que $[\,\cdot\,]_{C^{0,\gamma}(\Omega)}$ não é uma norma pois tomando u constante teremos $[u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)} = 0$.

Definição 1.2. *(Notação de multi-índice)*

(a) *Um vetor da forma* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ *com* $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, N$ *é chamado um multi-índice de ordem* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$.

(b) *Considere uma função* $\varphi \in C^k(\Omega)$ *e um multi-índice* α, *com* $|\alpha| \leqslant k$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Então definimos*

$$D^\alpha\varphi(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}\varphi(x).$$

Com isso, estamos aptos à próxima definição.

Definição 1.3. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \gamma \leqslant 1$. Chamamos de Espaço de Hölder o seguinte espaço:*

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \Big\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) \ ; \ \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty \Big\},$$

onde:

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}} := \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| \leqslant k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

Observação 1.1. *O Espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ definido acima é um espaço de Banach.*

Definição 1.4. *(Derivada fraca) Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u se,*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx \ ,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.
Neste caso usaremos a notação $D^\alpha u := v$.

Observação 1.2. .

(i) *A derivada fraca, caso exista, é única no sentido q.t.p. . De fato, sejam $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que, para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ vale*

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \psi dx = \int_\Omega u D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v} \psi dx.$$

Daí, para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega (v - \tilde{v}) \psi dx = 0$$

donde $v = \tilde{v}$ q.t.p. .

(ii) *Se u e $\partial\Omega$ são suficientemente regulares, então as derivadas fracas de u coincidem com as suas derivadas no sentido usual. Para verificar isto, basta usar o teorema da divergência, como no exemplo a seguir.*

Exemplo 1.1. *Considere* $\Omega = B(0,1)$ *e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1. *Então, para toda* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ *temos*

$$div(u\phi, 0, \ldots, 0) = u_{x_1}\phi + u\phi_{x_1}.$$

Assim, usando o teorema da divergência, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} u\phi \cdot \nu dS = \int_\Omega div(u\phi, 0, \ldots, 0)dx = \\ &= \int_\Omega u_{x_1}\phi dx + \int_\Omega u\phi_{x_1} dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega u\phi_{x_i}\, dx = -\int_\Omega u_{x_i}\phi\, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então u_{x_i} *é a derivada fraca de* u *conforme a definição* (1.4).

O próximo exemplo mostra que uma função pode ter derivada q.t.p. , porém não ter derivada fraca.

Exemplo 1.2. *Sejam* $N = 1$, $\Omega = (0,2)$ *e*

$$u(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & se \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Suponha que exista $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *satisfazendo*

$$\int_0^2 u\phi'\, dx = -\int_0^2 v\phi\, dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. *Então teremos*

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v\phi\, dx = \int_0^2 u\phi'\, dx &= \int_0^1 x\phi'\, dx + 2\int_1^2 \phi'\, dx \\ &= -\int_0^1 \phi\, dx - \phi(1), \end{aligned} \tag{1.1}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. *Escolha uma sequência* $(\phi_m) \subset C_c^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$0 \leqslant \phi_m \leqslant 1, \quad \phi_m(1) = 1 \quad e \quad \phi_m(x) \to 0,\ \forall x \neq 1.$$

Trocando ϕ por ϕ_m em (1.1) e tomando o limite com $m \to \infty$ obtemos

$$1 = \lim_{m\to\infty} \phi_m(1) = \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^2 v\phi_m \, dx - \int_0^1 \phi_m \, dx \right) = 0,$$

o que é uma contradição. Portanto não existe a derivada fraca de u.

Observação 1.3. *A definição a seguir, bem como alguns resultados posteriores continuam válidos para $p = \infty$. Porém consideraremos apenas o caso $1 \leqslant p < \infty$, a menos que seja expresso o contrário.*

Definição 1.5. *Sejam $1 \leqslant p < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$ fixos. Chamamos de Espaço de Sobolev o seguinte espaço:*

$$W^{k,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) \ ; \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall \alpha \ com \ |\alpha| \leqslant k \Big\}.$$

Observação 1.4. *Caso $p = 2$, denotamos $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Note ainda que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.*

Definição 1.6. *Para $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definimos:*

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando a desigualdade de Minkowski pode-se mostrar que $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ é uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$.

Definição 1.7. *Definimos $W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ na norma de $W^{k,p}(\Omega)$.*

Teorema 1.3. *O Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Mostraremos que toda sequência de Cauchy contida em $W^{k,p}(\Omega)$ converge para um elemento de $W^{k,p}(\Omega)$. De fato, seja $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$, temos

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|^p_{W^{k,p}} < \epsilon \quad &\Rightarrow \quad \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_n\|^p_p < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_n\|^p_p < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo α tal que $|\alpha| \leqslant k$.

Logo $(D^\alpha u_m) \subset L^p(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy. Como $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach, segue que existe $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que:

$$D^\alpha u_m \to u_\alpha \quad \text{em} \quad L^p(\Omega), \qquad \forall \alpha \ ; \ |\alpha| \leqslant k. \tag{1.2}$$

Em particular $u_m \to u$ em $L^p(\Omega)$, logo resta-nos mostrar que $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Para isso, mostremos que $D^\alpha u = u_\alpha$ para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. Seja $\psi \in C^\infty_c(\Omega)$. Da desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u D^\alpha \psi dx - \int_\Omega u_m D^\alpha \psi dx \right| &\leqslant \int_\Omega \big|(u - u_m) D^\alpha \psi\big| dx \\ &\leqslant \left(\int_\Omega |u - u_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |D^\alpha \psi|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= C \|u - u_m\|_p \to 0,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

pois $u_m \to u$ em $L^p(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Daí, por (1.2) e (1.3), segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u D^\alpha \psi dx &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha \psi dx \\ &= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_m \psi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{m\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u_m \psi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \psi dx, \end{aligned}$$

para todo α com $|\alpha| \leqslant k$ e para toda $\psi \in C^\infty_c(\Omega)$. Portanto $D^\alpha u = u_\alpha$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. □

Vejamos agora um resultado sobre densidade.

Teorema 1.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado, com $\partial\Omega$ de classe C^1, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $1 \leqslant p < \infty$. Então existe $(u_m) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que:*

$$u_m \to u \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Consulte [9]. □

O próximo resultado fornece um método que permite estender as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ para $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Devemos observar que dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, em geral

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega^{\complement} \end{cases}$$

não pertence a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.5. *(Extensão) Sejam $1 \leqslant p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado, com $\partial\Omega$ de classe C^1 e escolha $V \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\Omega \subset\subset V$. Então, existe uma trasformação linear limitada*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

tal que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

(i) *$Eu = u \quad$ q.t.p. $\;$ em Ω;*

(ii) *Eu tem suporte contido em V;*

(iii) *$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$;*

onde a constante $C > 0$ depende somente de p, U e V .

Demonstração. Consulte [9]. □

A função Eu definida acima é chamada de uma extensão de u ao $\mathbb{R}^N$.

Muitos problemas importantes de equações diferenciais parciais trazem condições de fronteira. Quando $u \in C(\overline{\Omega})$, então u possui valores sobre $\partial\Omega$ no sentido usual. Porém, uma típica função de $W^{1,p}(\Omega)$, em geral não é contínua e, na maioria das vezes, é definida apenas no sentido q.t.p. em Ω. Veremos agora uma maneira de dar sentido à expressão "u restrita à $\partial\Omega$".

Teorema 1.6. *(Traço) Sejam $1 \leqslant p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e com $\partial\Omega$ de classe C^1. Então existe uma transformação linear limitada*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que:

(i) $Tu = u\big|_{\partial\Omega}, \quad$ *se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Consulte [9]. □

A imagem Tu é chamada de o traço da função u na $\partial\Omega$. Com essa noção de traço de uma função, obtemos uma caracterização do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 1.7. *(Traço-zero) Sejam $1 \leqslant p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e com $\partial\Omega$ de classe C^1. Então:*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad Tu = 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Demonstração. Consulte [9]. □

Este teorema nos permite transferir condições de contorno dos problemas para o espaço de funções nos quais buscamos soluções. Por exemplo, se buscamos soluções que se anulam na $\partial\Omega$, basta restringirmos nossa procura ao espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definição 1.8. *Seja $1 \leqslant p < N$. O conjugado de Sobolev de p (ou expoente crítico de Sobolev) é o número*

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Passaremos a estabelecer alguns resultados de imersões. Eles serão úteis para regularizar soluções fracas, conceito que será formalizado mais a frente.

Teorema 1.8. *(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)*
Seja $1 \leqslant p < N$, então existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de p e N tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para toda função $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Vamos dividir esta demonstração em duas partes.

(i) $p = 1$.

Seja $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos reescrever u como

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)dy_i$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |u_{x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)|dy_i \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \big(|u_{x_1}(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_N)|^2 + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + |u_{x_N}(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_N)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\, dy_i \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_N)|dy_i
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, N$. Multiplicando estas desigualdades e elevando a desigualdade resultante à $\frac{1}{N-1}$, obtemos

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \big|\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_N)\big| dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Integrando a desigualdade acima com respeito à x_1 e usando a desigualdade generalizada de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}} dx_1 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Agora, integrando a desigualdade acima com respeito à x_2 e usando a desigualdade generalizada de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}} dx_1 dx_2 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\qquad \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_2 \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\qquad \prod_{i=3}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Integrando com respeito à $x_3, x_4, \ldots, x_N$, sempre utilizando a desigualdade generalizada de Hölder, chegaremos à:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{N}{N-1}} dx &\leqslant \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_N \right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx \right)^{\frac{N}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx$$

e dessa forma, segue o resultado para $p = 1$.

(ii) $1 < p < N$.

Defina $v = |u|^\gamma$, onde

$$\gamma := \frac{p(N-1)}{N-p} > 1.$$

Então, aplicando o resultado obtido no caso anterior à função v obtemos que:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v| dx.$$

Como $|\nabla v| = |\nabla |u|^\gamma| = \gamma |u|^{\gamma-1} |\nabla u|$, segue da desigualdade anterior que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leqslant \gamma \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| dx. \tag{1.4}$$

Porém, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Substituindo em (1.4) segue que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leqslant \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Porém

$$\frac{\gamma N}{N-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1} = \frac{Np}{N-p} = p^*.$$

Portanto

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Teorema 1.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e suponha que $\partial\Omega$ é de classe C^1. Assuma que $1 \leqslant p < N$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in L^{p^*}(\Omega)$ e além disto*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \ ,$$

onde C só depende de p e N.

Demonstração. Como $\partial\Omega$ é de classe C^1, seja $\overline{u} := Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ a extensão de $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Assim temos que $\overline{u} = u$ em Ω, $\operatorname{supp}(\overline{u}) \subset \mathbb{R}^N$ é compacto e

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.5}$$

Logo, pelo Teorema (1.4), existe $(u_m) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que:

$$u_m \to \overline{u} \text{ em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.6}$$

Além disso, pelo Teorema (1.8) temos que:

$$\begin{aligned} \|u_m - u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} &\leqslant C\|\nabla(u_m - u_k)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &= C\|\nabla u_m - \nabla u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

para todo $m, k \in \mathbb{N}$. Assim (u_m) é uma sequência de Cauchy em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, que é um espaço de Banach. Desta forma existe $g \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_m \to g$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Mostraremos que $g = \overline{u}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Pelo fato de $u_m \to \overline{u}$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, o Teorema (1.1), implica que existe uma subsequência $(u_{m'})$ de (u_m) tal que $u_{m'}(x) \to \overline{u}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Novamente pelo Teorema (1.1), como $u_{m'} \to g$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que existe uma subsequência $(u_{m''})$ de $(u_{m'})$ tal que $u_{m''}(x) \to g(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo

$$\begin{aligned} |\overline{u}(x) - g(x)| &= |\overline{u}(x) - u_{m''}(x) + u_{m''}(x) - g(x)| \\ &\leqslant |\overline{u}(x) - u_{m''}(x)| + |g(x) - u_{m''}(x)| \to 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{u} = g$ q.t.p. . Abusando da notação, denotemos apenas por (u_m) a subsequência $(u_{m''})$. Como $u_m \to \overline{u}$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ segue que

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \to \|\overline{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Juntando esta convergência com (1.5) e (1.6) obtemos

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leqslant \|\overline{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} && = \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} C\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} && = C\|\nabla \overline{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leqslant C\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} && \leqslant C\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, como $\overline{u} = u$ em Ω, segue o resultado. □

Teorema 1.10. *(Desigualdade de Poincaré) Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado. Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $1 \leqslant p < N$. Então,*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

onde $C = C(p, q, n, \Omega)$ e $1 \leqslant q \leqslant p^*$.

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então existe um sequência $(u_m) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Consideremos então $(\tilde{u}_m) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ as extensões de u_m para todo $m \in \mathbb{N}$, sendo $\tilde{u}_m(x) = 0$, se $x \in \Omega^{\complement}$. Assim, pelo Teorema (1.8), sabemos que

$$\|\tilde{u}_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\nabla \tilde{u}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

e portanto

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Uma vez que Ω é limitado, temos que $\forall q \in [1, p^*]$ vale

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)},$$

Juntando esta desigualdade com a anterior obtemos o resultado. □

Observação 1.5. *O Teorema* (1.10) *nos diz que, sobre o espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *a norma* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *e a norma* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *são equivalentes, caso* Ω *seja limitado.*

Definição 1.9. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach, com* $X \subset Y$. *Dizemos que* X *está imerso compactamente em* Y *se, e somente se:*
(i) *Existe uma constante* C *tal que*

$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \quad \forall x \in X;$$

(ii) *Se* (x_m) *é uma sequência limitada em* X, *então existe uma subsequência* (x_{m_j}) *convergente em* Y.
Escreveremos $X \subset\subset Y$ *para significar que* X *está imerso compactamente em* Y.

Teorema 1.11. *(Imersão compacta Rellich-Kondrachov) Assuma que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é limitado e com* $\partial\Omega$ *de classe* C^1. *Suponha que* $1 \leqslant p < N$. *Então:*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega), \qquad \forall q \in [1, p^*).$$

Demonstração. Uma vez que Ω é limitado e com $\partial\Omega$ de classe C^1, segue pelo Teorema (1.9) que, para todo $q \in [1, p^*)$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),$$

e também

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Resta-nos mostrar que se (u_m) for uma sequência limitada em $W^{1,p}(\Omega)$, então existe uma subsequência (u_{m_j}) que é convergente em $L^q(\Omega)$. Pelo Teorema (1.5), podemos supor que $\Omega = \mathbb{R}^N$ e que as funções (u_m) tem suporte compacto contido em algum conjunto limitado e aberto $V \subset \mathbb{R}^N$, para todo

$m \in \mathbb{N}$. Como a sequência (u_m) é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$, segue que

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} \right\} < \infty. \tag{1.7}$$

Seja $\epsilon > 0$ e defina

$$u_m^\epsilon := \eta_\epsilon * u_m,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, onde

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta(\frac{x}{\epsilon})$$

com $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)\ dx = 1.$$

Sem perda de generalidades, podemos supor que $\operatorname{supp}(u_m^\epsilon) \subset V,\ \forall m \in \mathbb{N}$. Observemos que, se u_m é C^∞, então

$$\begin{aligned} u_m^\epsilon(x) &= \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y) u_m(x-y)dy \\ &= \int_{B(0,\epsilon)} \frac{1}{\epsilon^n}\eta(\frac{y}{\epsilon}) u_m(x-y)dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y) u_m(x-\epsilon y)dy. \end{aligned}$$

Além disso, observemos também que

$$\begin{aligned} u_m(x) &= u_m(x).1 = u_m(x)\int_{B(0,1)} \eta(y)dy \\ &= \int_{B(0,1)} u_m(x)\eta(y)dy. \end{aligned}$$

Assim segue que

$$\begin{aligned} u_m^\epsilon(x) - u_m(x) &= \int_{B(0,1)} \eta(y)\big[u_m(x-\epsilon y) - u_m(x)\big]dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y)\int_0^1 \frac{d}{dt}\big[u_m(x-\epsilon t y)\big]dtdy \\ &= -\epsilon\int_{B(0,1)} \eta(y)\int_0^1 \nabla u_m(x-\epsilon t y)\cdot y\ dtdy. \end{aligned}$$

Dessa maneira:

$$\begin{aligned}\int_V \left|u_m^\epsilon(x) - u_m(x)\right|dx &\leqslant \epsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V \left|\nabla u_m(x-\epsilon ty)\right|dxdtdy \\ &\leqslant \epsilon \int_V \left|\nabla u_m(z)\right|dz,\end{aligned}$$

o que implica que, $\forall u_m \in W^{1,p}(V)$:

$$\|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leqslant \epsilon\|\nabla u_m\|_{L^1(V)} \leqslant \epsilon C\|Du_m\|_{L^p(V)}. \tag{1.8}$$

Além disso, como $1 \leqslant q < p^*$, usando a desigualdade de interpolação para norma L^p, segue que

$$\|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leqslant \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta},$$

com $\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*}$ e $0 < \theta < 1$. Usando (1.7), (1.8) e o Teorema (1.9) temos

$$\|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leqslant C\|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta,$$

e assim, segue que $u_m^\epsilon \to u_m$ em $L^q(V)$ quando $\epsilon \to 0$ uniformemente em m. Usando (1.7) e a desigualdade de Holder temos, para cada $\epsilon > 0$ e $\forall m \in \mathbb{N}$, que

$$\begin{aligned}\left|u_m^\epsilon(x)\right| &= \left|\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)u_m(y)dy\right| \\ &\leqslant \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)\left|u_m(y)\right|dy \\ &\leqslant \|\eta_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\ \|u_m\|_{L^1(V)} \leqslant \frac{C}{\epsilon^n} < \infty.\end{aligned}$$

Analogamente temos que $\left|\nabla u_m^\epsilon(x)\right| \leqslant \frac{C}{\epsilon^{n+1}} < \infty$, para cada $\epsilon > 0$ e $\forall m \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, temos que (u_m^ϵ) é uma sequência uniformemente limitada e equicontínua. Assim, fixado $\delta > 0$, o Teorema de Ascoli-Arzelá garante que existe $(u_{m_j}^\epsilon)$, subsequência de (u_m^ϵ), que converge uniformemente em V. Logo $(u_{m_j}^\epsilon)$ é uma sequência de Cauchy. Então para $\delta > 0$ fixado

$$\|u_{m_j}^\epsilon - u_{m_l}^\epsilon\|_{L^q(V)} < \frac{\delta}{3},$$

para $j, l \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes. Além disso, $u_m^\epsilon \to u_m$ quando $\epsilon \to 0$ em $L^q(V)$, o que implica

$$\|u_{m_j}^\epsilon - u_{m_j}\|_{L^q(V)} < \frac{\delta}{3},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\|u_{m_j} - u_{m_l}\|_{L^q(V)} &\leqslant \|u_{m_j} - u_{m_j}^\epsilon\|_{L^q(V)} + \|u_{m_j}^\epsilon - u_{m_l}^\epsilon\|_{L^q(V)} \\
&\qquad + \|u_{m_l}^\epsilon - u_{m_l}\|_{L^q(V)} \\
&< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.
\end{aligned}$$

Dessa forma, (u_{m_j}) é uma sequência de Cauchy em $L^q(V)$ e portanto convergente, uma vez que $L^q(V)$ é um espaço de Banach. $\square$

Considere $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta\, u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}. \tag{1.9}$$

Definição 1.10. *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema* (1.9) *se*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx = \int_\Omega f v \; dx,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Observação 1.6. *Seja Ω de classe C^∞. Usando [16] e [12] podemos ver que qualquer solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bu^{2^*-1}, & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases},$$

com a e b constantes, caso exista, é de classe $C^2(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.12. *(Princípio do máximo)*
Considere o operador Laplaceano. Assuma que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja limitado e conexo.

(i) *Se $-\Delta u \leqslant 0$ em Ω e u atinge seu máximo em Ω, então u é constante.*

(ii) *Analogamente, se $-\Delta u \geqslant 0$ em Ω e u atinge seu mínimo em Ω, então u é constante.*

Demonstração. Consulte [9]. □

Teorema 1.13. *Sejam $\Omega = B(0,1)$ e $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f & \text{em} & \Omega \\ u & > & 0 & \text{em} & \Omega \\ u & = & 0 & \text{na} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f é Lipschitz contínua. Então u é uma função radial, isto é

$$u(x) = v(r),$$

onde $r = |x|$ e $v : [0,1] \to [0,\infty)$ é uma função estritamente decrescente.

Demonstração. Consulte [9]. □

O próximo teorema será usado no capítulo 3 para provarmos a existência de solução para determinadas EDP's.

Teorema 1.14. *(Multiplicador de Lagrange) Sejam F e G funcionais de classe C^1 sobre um espaço de Banach X. Suponha, para $x_0 \in X$, que tenhamos $G(x_0) = C$ e que x_0 é um ponto de extremo local para F quando restrito ao conjunto de nível*

$$\mathcal{C} = \big\{x \in X \ ; \ G(x) = C\big\}.$$

Então:

(i) $G'(x_0)v = 0$, *para todo* $v \in X$, *ou*

(ii) *Existe* $\mu \in \mathbb{R}$ *tal que* $F'(x_0)v = \mu G'(x_0)v$, *para todo* $v \in X$.

Demonstração. Consulte [15]. $\square$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $C(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas definidas em Ω. Considere o espaço

$$\mathcal{L}(\Omega) = \left\{ u \in C(\Omega)\ ;\ \|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty \right\}$$

das funções contínuas e limitadas em Ω e o subespaço

$$\mathcal{K}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}(\Omega)\ ;\ \operatorname{supp}(u) \subset \Omega \text{ é compacto}\}.$$

Defina $\mathcal{C}_0(\Omega)$ como sendo $\overline{\mathcal{K}(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}$, o fecho de $\mathcal{K}(\Omega)$ em $\mathcal{L}(\Omega)$ na norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Dada uma medida finita μ em Ω, defina o funcional linear contínuo sobre $\mathcal{C}_0(\Omega)$ dado por

$$u \mapsto \langle \mu, u\rangle = \int_\Omega u(x)d\mu.$$

A norma da medida μ é definida como

$$\|\mu\| = \sup_{u\in\mathcal{C}_0(\Omega)} \frac{|\langle \mu, u\rangle|}{\|u\|_\infty}. \tag{1.10}$$

Seja $\mathcal{M}(\Omega)$ o espaço vetorial das medidas finitas sobre Ω.

Definição 1.11. *(Convergência fraca de medidas) A seqüência* (μ_n) *de medidas em* $\mathcal{M}(\Omega)$ *converge fracamente para a medida* $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ *quando*

$$\langle \mu_n, u\rangle \to \langle \mu, u\rangle,$$

para toda $u \in \mathcal{C}_0(\Omega)$. *Denotamos* $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Teorema 1.15. *.*

(a) *Toda seqüência limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$ possui subseqüência fracamente convergente em $\mathcal{M}(\Omega)$.*

(b) *Se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, então (μ_n) é limitada e*

$$\|\mu\| \leqslant \underline{\lim}\, \|\mu_n\|.$$

Demonstração. Consulte [18]. □

Observação 1.7. *Sabemos que dada uma função positiva $u : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mensurável, podemos definir uma medida positiva em Ω fazendo*

$$\mu_u(E) = \int_E u(x)dx,$$

onde E é um subconjunto Lebesgue-mensurável de Ω.

Considere uma seqüência (u_n) limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e defina

$$\nu_n(E) = \nu_{u_n^{p^*}} = \int_E |u_n|^{p^*} dx,$$

ou seja, $\nu_n = |u_n|^{p^*} dx$. Então

$$\begin{aligned} \|\nu_n\| &= \sup_{u \in \mathcal{C}_0(\Omega)} \left\{ \frac{|\langle \nu_n, u\rangle|}{\|u\|_\infty} \right\} \\ &\leqslant \int_\Omega |u_n|^{p^*} dx = \|u_n\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} < M_1, \end{aligned}$$

para alguma constante M_1. Analogamente, definindo $\mu_n = |\nabla u_n|^p dx$ teremos

$$\|\mu_n\| \leqslant \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} < M_2,$$

para alguma constante M_2. Logo, (ν_n) e (μ_n) são sequências limitadas de medidas em $\mathcal{M}(\Omega)$ e, pelo Teorema (1.15), admitem subsequência fracamente convergente.

Teorema 1.16. *(Concentração de compacidade)*
Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega)$. Suponhamos, para as sequências de medidas $\nu_n = |u_n|^{2^*}dx$ e $\mu_n = |\nabla u_n|^2 dx$, que ocorram as seguintes convergências fracas de medida

$$\nu_n \rightharpoonup \nu \qquad e \qquad \mu_n \rightharpoonup \mu,$$

onde μ e ν são medidas não-negativas limitadas em Ω. Então, existe um conjunto no máximo enumerável J, uma família de pontos $\{x_j \ ; \ j \in J\} \subset \overline{\Omega}$ e famílias de números positivos $\{\nu_j \ ; \ j \in J\}$ e $\{\mu_j \ ; \ j \in J\}$ tais que

(i) $\nu = |u|^{2^*}dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$;

(ii) $\mu \geqslant |\nabla u|^2 dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$;

(iii) $A(2,n)^2 \mu_j \geqslant (\nu_j)^{\frac{2}{2^*}}$,

onde $A(2,n)$ é a constante ótima de Sobolev dada em (7) e δ_{x_j} é a medida de Dirac definida por

$$\delta_{x_j}(E) := \begin{cases} 0, & se\ x_j \notin E; \\ 1, & se\ x_j \in E, \end{cases}$$

para todo $E \subset \Omega$ mensurável. Também chamaremos a medida δ_{x_j} de medida atômica e os pontos x_j de átomos.

Demonstração. Provemos a afirmação (iii). Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, esta sequência é limitada na norma de $H_0^1(\Omega)$. Uma vez que $2^* > 2$ e Ω é limitado, temos pelo Teorema (1.11), que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Desta convergência e do Teorema (1.1) temos que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω, a menos de subsequência. Definindo a sequência de medidas

$$\omega_n = \nu_n - |u|^{2^*}dx = |u_n|^{2^*}dx - |u|^{2^*}dx,$$

podemos escrever

$$\omega_n = |u_n|^{2^*}dx - |u|^{2^*}dx = |u_n - u|^{2^*}dx + f_n dx,$$

onde $f_n = |u_n|^{2^*} - |u_n - u|^{2^*} - |u|^{2^*}$. Então

$$\int_E f_n dx \to 0,$$

para qualquer conjunto mensurável $E \subset \Omega$, pois do teorema (1.2) temos

$$\|u_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(E)} - \|u_n - u\|^{2^*}_{L^{2^*}(E)} \to \|u\|^{2^*}_{L^{2^*}(E)},$$

para qualquer $E \subset \Omega$ mensurável. Seja $v_n = u_n - u \in H^1_0(\Omega)$ e considere também a sequência de medidas

$$\lambda_n = |\nabla v_n|^2 dx.$$

Como v_n é limitada em $H^1_0(\Omega)$, pelo Teorema (1.15) podemos admitir que $\lambda_n \rightharpoonup \lambda$, no sentido de medida, para alguma medida λ. Além disso, v_n também é limitada em $L^{2^*}(\Omega)$ pelo Teorema (1.8) e então admitiremos que $\omega_n \rightharpoonup \omega$, no sentido de medida, para alguma medida ω. Além disso, $\lambda, \omega \geqslant 0$. Afirmamos que a medida ω pode ter no máximo um número enumerável de átomos. De fato, sendo $\sum \nu_\alpha$ o valor da medida ω sobre o conjunto dos átomos, deve ocorrer $\sum \nu_\alpha < \infty$, porque ω é finita, pelo Teorema (1.15). Então, dado $k \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$M_k = \left\{ \nu_\alpha \; ; \; \nu_\alpha > \frac{1}{k} \right\}$$

é finito, pois a soma $\sum \nu_\alpha$ é finita. Como o conjunto dos átomos é dado por $\cup_{k=1}^{\infty} M_k$, segue que o conjunto de átomos é enumerável. Denotaremos por J o conjunto dos índices para os quais $\nu_\alpha > 0$. Sejam $\{x_j ; j \in J\}$ os átomos da medida ω, então podemos decompor ω como

$$\omega = \omega_0 + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \tag{1.11}$$

onde ω_0 não possui átomos. Vamos fazer uma comparação entre as medidas ω e λ. Dada qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, vale $\varphi v_n \in H_0^1(\Omega)$. Da desigualdade (7) e da desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |\varphi v_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leqslant C_1 \int_\Omega |v_n|^2 dx + C_2 \left(\int_\Omega |v_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ A(2,n)^2 \int_\Omega |\varphi|^2 |\nabla v_n|^2 dx.\end{aligned}$$

Como $v_n = u_n - u \to 0$ em $L^2(\Omega)$, tomando o limite em n na desigualdade acima e usando que $|v_n|^{2^*} dx \rightharpoonup \omega$ e $|\nabla v_n|^2 dx \rightharpoonup \lambda$, obtemos que

$$\left(\int_\Omega |\varphi|^{2^*} d\omega\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant A(2,n)^2 \int_\Omega |\varphi|^2 d\lambda, \tag{1.12}$$

qualquer que seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Sendo x_j um átomo da medida ω, tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ com $0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant 1$ tal que $\varphi_\varepsilon(x_j) = 1$ e $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ em $B(x_j, \varepsilon)^\complement$. Então,

$$\left(\int_\Omega |\varphi_\varepsilon|^{2^*} d\omega\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant A(2,n)^2 \int_\Omega |\varphi_\varepsilon|^2 d\lambda.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá

$$A(2,n)^2 \lambda(\{x_j\}) \geqslant (\nu_j)^{\frac{2}{2^*}}. \tag{1.13}$$

Por outro lado, para toda $0 \leqslant \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \varphi |\nabla v_n|^2 dx \;\leqslant\; \int_\Omega \varphi |\nabla u_n|^2 dx + C \int_\Omega \varphi |\nabla u|^2 dx.$$

Fixe um átomo x_j, considere $0 \leqslant \phi_\varepsilon \leqslant 1$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_\varepsilon(x_j) = 1$ e $\phi_\varepsilon \equiv 0$ em $B(x_j, \varepsilon)^\complement$. Como $|\nabla v_n|^2 dx \rightharpoonup \lambda$ e $|\nabla u_n|^2 dx \rightharpoonup \mu$ no sentido de medida, tomando o limite em n na desigualdade acima e usando ϕ_ε no lugar de φ, obtemos

$$\int_\Omega \phi_\varepsilon d\lambda \leqslant \int_\Omega \phi_\varepsilon d\mu + C \int_\Omega \phi_\varepsilon |\nabla u|^2 dx.$$

Ao fazer $\varepsilon \to 0$, o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá agora

$$\lambda(\{x_j\}) \leqslant \mu(\{x_j\}) := \mu_j,$$

o que, junto com a desigualdade (1.13), conclui a prova de (iii).

Provaremos agora a afirmação (ii). Começamos afirmando que

$$\mu \geqslant |\nabla u|^2 dx. \tag{1.14}$$

De fato, considere $0 \leqslant \phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como $|\nabla u_n|^2 dx \rightharpoonup \mu$ no sentido de medida e $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \phi dx = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \phi dx \\ &\geqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 \phi \, dx, \end{aligned} \tag{1.15}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Seja $E \subset \Omega$ um mensurável qualquer. Como Ω tem medida finita, vale $\chi_E \in L^2(\Omega)$, onde χ_E é a função característica de E. Como χ_E é uma função não-negativa limitada, podemos supor a existência de uma sequência uniformemente limitada $0 \leqslant \phi_n \leqslant M$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to \chi_E$ q.t.p. Ω. Então, como para todo n,

$$\int_\Omega \phi_n d\mu \geqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 \phi_n dx,$$

o teorema da convergência dominada de Lebesgue aplicado aos dois lados da desigualdade acima nos conduz a

$$\mu(E) = \int_\Omega \chi_E d\mu \geqslant \int_\Omega \chi_E |\nabla u|^2 dx = \int_E |\nabla u|^2 dx,$$

o que prova a afirmação (1.14). Note que as medidas $|\nabla u|^2 dx$ e δ_{x_j} são relativamente singulares e, dessa forma, também são $|\nabla u|^2 dx$ e $\sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$. Então,

$$\mu \geqslant |\nabla u|^2 dx + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j},$$

o que conclui a prova de (ii).

Vamos agora provar (i). Iremos mostrar que ω_0 é absolutamente contínua com respeito a λ ($\omega_0 \ll \lambda$), ou seja, que dado $E \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ tal que $\lambda(E) = 0$, tem-se necessariamente $\omega_0(E) = 0$. Dado um mensurável $E \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ tal que $\int_E d\lambda < A(2,n)^{-2}$, considere novamente uma sequência uniformemente limitada $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ convergindo q.t.p. em Ω para χ_E, por (1.12) temos

$$\left(\int_\Omega |\phi_n|^{2^*} d\omega\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant A(2,n)^2 \int_\Omega |\phi_n|^2 d\lambda,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite em n obtemos

$$\left(\int_E d\omega\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant A(2,n)^2 \int_E d\lambda.$$

Como tomamos E tal que $\int_E d\lambda \leqslant A(2,n)^{-2}$, segue que

$$1 \geqslant A(2,n)^2 \int_E d\lambda \geqslant \left(\int_E d\omega\right)^{\frac{2}{2^*}} \geqslant \int_E d\omega. \tag{1.16}$$

Seja $E \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ tal que $\lambda(E) = \int_E d\lambda = 0$. A desigualdade (1.16) vale também neste conjunto, donde $\omega_0(E) = \int_E d\omega = 0$, ou seja, $\omega_0 \ll \lambda$, como queríamos. Agora iremos provar que $\omega_0 = 0$. Isso já ocorre no conjunto $\{x_j; j \in J\}$. Como mostramos que $\omega_0 \ll \lambda$, podemos aplicar o teorema de Radon-Nikodym para encontrar uma função f não-negativa e λ-integrável tal que

$$\omega_0(E) = \int_E f d\lambda \tag{1.17}$$

para todo $E \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ mensurável. Tomando $y \in \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$, obtemos

$$0 = \omega_0(\{y\}) = \int_{\{y\}} f(x) d\lambda = f(y)\lambda(\{y\}).$$

Como λ tem, eventualmente, mais átomos que ω, pode ocorrer $\lambda(\{y\}) \neq 0$ e neste caso vale $f(y) = 0$. Se ocorrer $\lambda(\{y\}) = 0$, como

$$f(y) = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{\int_{B(y,\rho)} d\omega_0}{\int_{B(y,\rho)} d\lambda} \right],$$

usando (1.12) encontramos

$$A(2,n)^2 f(y)^{\frac{2}{2^*}} = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{A(2,n)^{-2} \left(\int_{B(y,\rho)} d\omega_0 \right)^{\frac{2}{2^*}}}{\left(\int_{B(y,\rho)} d\lambda \right)^{\frac{2}{2^*}}} \right] \leqslant \lim_{\rho \to 0} \left[\int_{B(y,\rho)} d\lambda \right]^{\frac{2^*-2}{2^*}} = 0.$$

Isso mostra que $f(y) = 0$ para quase todo $y \in \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$, com respeito à medida λ. Usando (1.17), temos $\omega_0 = 0$. Então, ω contém apenas átomos. Havíamos admitido que $\omega_n \rightharpoonup \omega$. Da definição de ω_n, vem que $\omega = \nu - |u|^{2^*} dx$. De (1.11) temos que

$$\nu = |u|^{2^*} dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Definição 1.12. .

(i) *Uma medida de Borel μ sobre $\mathbb{R}^N$ é regular se, para todo conjunto de Borel B tivermos*

$$\mu(B) = \inf\{\mu(A); A \text{ é aberto e } B \subset A\}.$$

(ii) *Uma medida de Radon sobre $\mathbb{R}^N$ é uma medida de Borel, regular que é finita sobre subconjuntos compactos do $\mathbb{R}^N$.*

Teorema 1.17. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ convexa. Então existem medidas de Radon $\mu^{ij} = \mu^{ji}$ não-negativas tais que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi \, d\mu^{ij}, \quad \forall i,j = 1,2,\cdots,n$$

para toda $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Consulte [10]. □

Pelo Teorema da Decomposição de Lebesgue, para cada $i, j = 1, 2, \cdots, n$, temos que

$$\mu^{ij} = \mu^{ij}_{ac} + \mu^{ij}_{s},$$

onde μ^{ij}_{ac} é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue e μ^{ij}_{s} é singular com respeito a medida de Lebesgue. Além disso, pelo Teorema de Radon-Nikodim, temos que

$$\mu^{ij}_{ac} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx,$$

e portanto

$$\mu^{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx + \mu^{ij}_{s}.$$

Fazendo

$$\left[D^2\varphi\right] = \left[\mu^{ij}\right],$$

$$\left[D^2\varphi\right]_{ac} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right],$$

$$\left[D^2\varphi\right]_{s} = \left[\mu^{ij}_{s}\right],$$

temos

$$\left[D^2\varphi\right] = \left[D^2\varphi\right]_{ac} + \left[D^2\varphi\right]_{s},$$

onde $[D^2\varphi]_{ac}$ é a parte absolutamente contínua e $[D^2\varphi]_{s}$ é a parte singular da matriz Hessiana distribucional.

Teorema 1.18. *(Aleksandrov) Seja $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ convexa. Então φ possui segunda derivada q.t.p. .*

Demonstração. Consulte [10]. □

Capítulo 2

Desigualdades Homogêneas

Nosso objetivo neste capítulo será:

1. Provar a desigualdade homogênea ótima de Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant A\,(p,q,N,f) \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u) dx\right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx\right)^{\frac{1-\theta}{q}},$$

2. Provar a desigualdade homogênea logarítmica ótima de Sobolev

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \log |u|^p dx \leqslant \frac{N}{p} \log \left(\mathcal{A}(p,N,f) \int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u) dx\right),$$

onde

$$1 < p \leqslant q \leqslant \frac{p(N-1)}{N-p},\ r = \frac{p(q-1)}{p-1} \text{ e } \theta = \frac{N(q-p)}{\big(Np-(N-p)q\big)(q-1)}. \quad (2.1)$$

e $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função p-homogênea, convexa, par e positiva.

A constante $A\,(p,q,N,f)$ é ótima, no sentido que se a trocarmos por uma constante C menor do que $A\,(p,q,N,f)$, então existe u_0 tal que

$$\|u_0\|_r > C \|f(\nabla u_0)\|_1^{\frac{\theta}{p}} \|u_0\|_q^{1-\theta}.$$

Analogamente para $\mathcal{A}(p,N,f)$.

2.1 Desigualdade ótima de Gagliardo-Nirenberg

Definição 2.1. *Sejam μ e ν duas medidas de Borel não-negativas em $\mathbb{R}^N$ com mesma massa total. Então uma aplicação $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ transporta μ em ν se para toda função mensurável $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(y)d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} b(T(x))d\mu. \tag{2.2}$$

O principal resultado para provarmos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg é o seguinte teorema abaixo, provado em [14].

Teorema 2.1. *Sejam μ e ν duas medidas de probabilidade em $\mathbb{R}^N$ e μ absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Então existe uma função convexa $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi$ transporta μ em ν. Além disso, $\nabla\varphi$ é unicamente determinada q.t.p. com respeito a μ.*

O transporte $\nabla\varphi$ é conhecido como *aplicação de Brenier*. Para nosso propósito, usaremos as seguintes medidas: $d\mu = F(x)dx$ e $d\nu = G(x)dx$, sendo $F, G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funções tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(x)dx = 1.$$

Usando estas medidas em (2.2) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(y)G(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} b(\nabla\varphi(x))F(x)dx. \tag{2.3}$$

Através da identidade acima, pode-se mostrar que φ resolve a equação de Monge-Amperè

$$F(x) = G(\nabla\varphi(x))det[D^2\varphi(x)], \tag{2.4}$$

onde $[D^2\varphi]_{ac}$ é a parte absolutamente contínua da matriz Hessiana distribucional da φ.

Teorema 2.2. *Sejam $u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $u, v > 0$, $\|u\|_r = \|v\|_r = 1$ e p, q, r satisfazendo a condição (2.1). Considere a aplicação de Brenier $\nabla\varphi$ que transporta a medida $u^r dx$ na medida $v^r dx$. Então:*

$$\frac{p(q-1)}{q-p}\int_{\mathbb{R}^N} v^q dx \leqslant -q\int_{\mathbb{R}^N} u^{q-1}\nabla u \nabla\varphi dx + \frac{p(q-1)-N(q-p)}{q-p}\int_{\mathbb{R}^N} u^q dx$$

Demonstração. Sejam $F = u^r$ e $G = v^r$. Da equação de Monge-Amperè (1.4) temos que:

$$G(\nabla\varphi(x))^{\frac{p-q}{p(q-1)}} = F(x)^{\frac{p-q}{p(q-1)}}(det(D^2\varphi(x)))^{-\frac{p-q}{p(q-1)}}, \tag{2.5}$$

onde esta igualdade deve ser entendida no sentido q.t.p. . Observemos primeiramente que, no conjunto das matrizes simétricas $n \times n$ não negativas, a aplicação $M \mapsto (detM)^{-\frac{p-q}{p(q-1)}}$ é côncava, pois $0 \leqslant \frac{q-p}{p(q-1)} \leqslant \frac{1}{N}$. Dessa maneira temos que,

$$\left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)^{-1}(detM)^{-\frac{p-q}{p(q-1)}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)^{-1}\left[1 - n\left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)\right] + trM.$$

Como φ é convexa temos que $D^2\varphi$ é uma matriz $n\times n$ simétrica não-negativa. Logo, substituindo esta desigualde na igualdade (2.5) teremos, para quase todo ponto, que

$$\left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)^{-1} G(\nabla\varphi)^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \leqslant \frac{p(q-1)-N(q-p)}{q-p}F^{\frac{p-q}{p(q-1)}} + F^{\frac{p-q}{p(q-1)}}\Delta\varphi.$$

Integrando em relação à medida $F(x)dx$ e usando o transporte de massa (2.3) com $b = G^{\frac{p-q}{p(q-1)}}$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{p(q-1)}{q-p}\int_{\mathbb{R}^N} G^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}dx &\leqslant \frac{p(q-1)-N(q-p)}{q-p}\int_{\mathbb{R}^N} F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}\Delta\varphi dx.\end{aligned}$$

Seja $0 \leqslant h_n \subset C_c^2(\mathbb{R}^N)$. Como $\mu^{ij} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}dx + \mu_s^{ij}$ e $\mu_s^{ij} \geqslant 0$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, N$ temos, pelo Teorema (1.18) que

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial h_n}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\, dx.$$

Tomando $h_n \subset C_c^2(\mathbb{R}^N)$ com $h_n \to F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}$ em $C^1(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}} \Delta\varphi dx \leqslant -\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}})\nabla\varphi dx,$$

Portanto, substituindo as funções F e G por suas definições e lembrando que $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$, segue que

$$\frac{p(q-1)}{q-p}\int_{\mathbb{R}^N} v^q dx \leqslant -q\int_{\mathbb{R}^N} u^{q-1}\nabla u \nabla\varphi dx + \frac{p(q-1) - N(q-p)}{q-p}\int_{\mathbb{R}^N} u^q dx.$$

□

Definição 2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes propriedades:*

$(P.1)$ $\qquad f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ $\qquad$ *(p-homogeneidade)*

para todo $\lambda \geqslant 0$;

$(P.2)$ $\qquad f(\mu x + (1-\mu)y) \leqslant \mu f(x) + (1-\mu) f(y)$ $\qquad$ *(convexidade)*

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N, \mu \in [0,1]$;

$(P.3)$ $\qquad f(x) = f(-x)$ $\qquad$ *(simetria)*

para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$(P.4)$ $\qquad f(x) > 0$ $\qquad$ *(positividade)*

para todo $x \neq 0$.

Definimos a transformada de Legendre da função f, denotada por f^*, a seguinte função:

$$f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \{x \cdot y - f(y)\}.$$

Lema 2.1. *A transformada de Legendre, definida acima, satisfaz as propriedades (P.2), (P.3) e (P.4) e, além disso, é p'-homogênea, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Demonstração. **(i)** f^* é p'-homogênea.

O caso $\lambda = 0$ é trivial. Considere então $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$. Assim

$$\begin{aligned} f^*(\lambda x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \{\lambda x \cdot y - f(y)\} \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \Big\{ \frac{\lambda^{p'}}{\lambda^{p'}} \lambda x \cdot y - f(y) \Big\} \\ &= \lambda^{p'} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \Big\{ x \cdot (\lambda^{1-p'}) y - \lambda^{-p'} f(y) \Big\} \\ &= \lambda^{p'} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \{ x \cdot (\lambda^{\frac{-1}{p-1}}) y - f(\lambda^{\frac{-1}{p-1}} y)\} = \lambda^{p'} f^*(x). \end{aligned}$$

(ii) f^* é simétrica.

Dado $x \in \mathbb{R}^N$, então

$$\begin{aligned} f^*(-x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \{(-x) \cdot y - f(y)\} \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \{x \cdot (-y) - f(-y)\} = f^*(x), \end{aligned}$$

pois $f(y) = f(-y)$, uma vez que f é simétrica.

(iii) f^* é positiva.

Seja $x \in \mathbb{R}^N$ com $x \neq 0$, então

$$f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \{x \cdot y - f(y)\} \geqslant x \cdot y - f(y)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Logo, para todo $\lambda \geqslant 0$ temos que,

$$\begin{aligned} f^*(x) &\geqslant x \cdot (\lambda x) - f(\lambda x) \\ &= \lambda \|x\|^2 - \lambda^p f(x) \\ &= \lambda \big[\|x\|^2 - \lambda^{p-1} f(x) \big]. \end{aligned}$$

Como $p > 1$ segue que $\lambda^{p-1} f(x) < \|x\|^2$ para $\lambda \geqslant 0$ suficientemente pequeno. Portanto $f^*(x) > 0$.

(iv) f^* é convexa.

De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\mu \in [0,1]$, então:

$$\begin{aligned} f^*\big(\mu x + (1-\mu)y\big) &= \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \big\{\big(\mu x + (1-\mu)y\big)\cdot z - f(z)\big\} \\ &= \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \{\mu x\cdot z - \mu f(z) + (1-\mu)y\cdot z - (1-\mu)f(z)\} \\ &\leqslant \mu \sup_{z\in\mathbb{R}^N}\{x\cdot z - f(z)\} + (1-\mu)\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\{y\cdot z - f(z)\} \\ &= \mu f^*(x) + (1-\mu)f^*(y). \end{aligned}$$

□

Lema 2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo $(P.2)$ e $(P.4)$. Então $f^{**} = f$.*

Demonstração. Por simplicidade iremos usar "$\cdot$" para denotar o produto interno Euclidiano tanto em $\mathbb{R}^N$ quanto em $\mathbb{R}^{N+1}$. Temos, pela definição que

$$f^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\{x\cdot y - f(y)\}.$$

Assim,

$$f^*(x) \geqslant x\cdot y - f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

o que implica

$$x\cdot y - f^*(x) \leqslant f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Logo, tomando o supremo em $x \in \mathbb{R}^N$, segue que

$$f^{**}(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\{x\cdot y - f^*(x)\} \leqslant f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

donde $f^{**} \leqslant f$. Considere o seguinte conjunto, chamado de *epigráfico* da f

$$X := \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \ \mid \ f(x) \leqslant \lambda\} \subset \mathbb{R}^{N+1}.$$

Temos que X é convexo, uma vez que f é convexa. Além disso, pela continuidade da f, temos que X é fechado. Suponha, por absurdo, que exista

$x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $f^{**}(x_0) < f(x_0)$, então $(x_0, f^{**}(x_0)) \notin X$. Como X é convexo e fechado, existe um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^{N+1}$ de equação $\langle x - y, \nu \rangle = 0$, que separa X de $(x_0, f^{**}(x_0))$, sendo $y \in H$ fixado, $\nu \perp H$ e $x \in \mathbb{R}^{N+1}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$(x - y) \cdot \nu > 0, \ \forall x \in X \qquad \text{e} \qquad \big[(x_0, f^{**}(x_0)) - y\big] \cdot \nu < 0.$$

Daí, fazendo $y \cdot \nu = c$, segue que

$$x \cdot \nu > c, \qquad \forall x \in X, \ \text{ onde } \ x = (z, \lambda), \ \text{ e } \ f(z) \leqslant \lambda;$$

e também

$$(x_0, f^{**}(x_0)) \cdot \nu < c$$

Como $\nu \in \mathbb{R}^{N+1}$ temos que $\nu = (\nu_0, \nu_1)$, onde $\nu_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\nu_1 \in \mathbb{R}$. Podemos assumir que $\nu_1 \geqslant 0$. Assim, temos que

$$z \cdot \nu_0 + f(z)\nu_1 > c$$

e

$$x_0 \cdot \nu_0 + f^{**}(x_0)\nu_1 < c \tag{2.6}$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$ e para todo $z \in \mathbb{R}^N$ temos

$$z \cdot \nu_0 + f(z)(\nu_1 + \epsilon) \geqslant c$$

e assim

$$z \cdot \left(\frac{-\nu_0}{\nu_1 + \epsilon} \right) - f(z) < -\frac{c}{\nu_1 + \epsilon}.$$

Tomando o supremo em $z \in \mathbb{R}^N$, temos que

$$f^* \left(\frac{-\nu_0}{\nu_1 + \epsilon} \right) \leqslant -\frac{c}{\nu_1 + \epsilon}.$$

Por outro lado,

$$f^{**}(x_0) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \{x_0 \cdot y - f^*(y)\} \geqslant x_0 \cdot \left(\frac{-\nu_0}{\nu_1 + \epsilon}\right) - f^*\left(\frac{-\nu_0}{\nu_1 + \epsilon}\right).$$

Dessa forma

$$f^{**}(x_0) \geqslant \frac{-x_0 \cdot \nu_0}{\nu_1 + \epsilon} + \frac{c}{\nu_1 + \epsilon} \ ,$$

o que implica

$$(\nu_1 + \epsilon) f^{**}(x_0) + x_0 \cdot \nu_0 \geqslant c, \ \forall \epsilon > 0.$$

Assim, fazendo $\epsilon \to 0$ temos que

$$x_0 \cdot \nu_0 + f^{**}(x_0)\nu_1 \geqslant c$$

contrariando a desigualdade (2.6). Portanto $f^{**} = f$. □

Lema 2.3. *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo* $(P.1)$, $(P.2)$ *e* $(P.4)$. *Então*

$$(p-1) f\big(\nabla f^*(x)\big) = f^*(x),$$

no sentido q.t.p. .

Demonstração. Pelo Lema (2.2) temos que $f^{**} = f$, então.

$$f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \{x \cdot y - f^*(y)\}.$$

Por outro lado, a convexidade da função f^* implica que $\nabla f^*(x)$ existe q.t.p. e além disto

$$f^*(y) - f^*(x) \geqslant \nabla f^*(x) \cdot (y - x),$$

ou seja,

$$\nabla f^*(x) \cdot x - f^*(x) \geqslant \nabla f^*(x) \cdot y - f^*(y)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$ e q.t.p. em x. Tomando o supremo em y, temos

$$f\big(\nabla f^*(x)\big) \leqslant \nabla f^*(x) \cdot x - f^*(x).$$

Além disso, pela definição da função f^*, temos que

$$f^*(x) \geqslant \nabla f^*(x).x - f\big(\nabla f^*(x)\big).$$

Portanto,

$$f\big(\nabla f^*(x)\big) = \nabla f^*(x) \cdot x - f^*(x),$$

no sentido q.t.p. . Por outro lado, da p'-homogeneidade da f^* temos

$$f^*(\lambda x) = \lambda^{p'} f^*(x),$$

para todo $\lambda \geqslant 0$. Derivando em relação à λ e tomando $\lambda = 1$ obtemos $\nabla f^*(x) \cdot x = p' f^*(x)$, donde podemos concluir que,

$$f\big(\nabla f^*(x)\big) = (p' - 1) f^*(x).$$

Como $p' - 1 = \frac{1}{p-1}$, segue o resultado. □

Definição 2.3. *Sejam* $1 < p < N$ *e* f *satisfazendo* $(P.1), (P.2), (P.3)$ *e* $(P.4)$. *Definimos a função* $w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *por*

$$w(x) := \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{-\frac{p-1}{q-p}}, \tag{2.7}$$

onde $\sigma > 0$ *é tal que* $\|w\|_r = 1$, *e* $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$.

Lema 2.4. *Sejam* $1 < p < N$, f *satisfazendo* $(P.1), (P.2), (P.3), (P.4)$ *e* w *como acima. Então*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla w)dx = \frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} f^* w^r dx;$

(ii) $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} w^q dx = \frac{pq}{N(p-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^* w^r dx.$

Demonstração. Observemos que

$$\nabla w(x) = \nabla \left[\left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x) \right)^{-\frac{p-1}{q-p}} \right] = -\left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x) \right)^{-\frac{q-1}{q-p}} \nabla f^*(x).$$

Assim

$$\begin{aligned} f(\nabla w(x)) &= f\left(-\left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x) \right)^{-\frac{q-1}{q-p}} \nabla f^*(x) \right) \\ &= \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x) \right)^{-\frac{p(q-1)}{q-p}} f\left(\nabla f^*(x) \right) \\ &= \frac{1}{p-1} w^r(x) f^*(x), \end{aligned}$$

onde a última igualdade se justifica por meio do Lema (2.3) e levando em conta que

$$\left(-\frac{p-1}{q-p} \right) r = \left(-\frac{p-1}{q-p} \right) \left(\frac{p(q-1)}{p-1} \right) = -\frac{p(q-1)}{q-p}.$$

Integrando em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla w) dx = \frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} f^* w^r dx,$$

o que conclui a demonstração de (i).

Consideremos agora, $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que:

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B(0,1) \\ 0, & \text{se } x \in B(0,2)^{\complement} \end{cases}.$$

Defina $\eta_\epsilon(x) := \eta(\frac{x}{\epsilon})$ e observemos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}\left[\eta_\epsilon\left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} x\right] dx \\
= \quad & \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\epsilon\left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \operatorname{div}(x)\ dx \\
+ \quad & \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\eta_\epsilon\left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \cdot x\ dx \\
- \quad & \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\epsilon\ q\left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-p(q-1)}{q-p}} \nabla f^*(x)\cdot x\ dx \quad .
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Vejamos agora, o que acontece com cada uma das integrais acima.

(a) Como η_ϵ tem suporte compacto contido em $B(0,2)$ o teorema da divergência nos diz que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}\left[\eta_\epsilon\left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} x\right] dx \\
&\qquad = \int_{B(0,2)} \operatorname{div}\left[\eta_\epsilon\left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} x\right] dx \\
&\qquad = \int_{\partial B(0,2)} \eta_\epsilon\left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} x\cdot\nu(x)\ dx = 0,
\end{aligned}
$$

onde $\nu(x)$ é vetor unitário normal em x.

(b) Observemos agora que, fazendo $\epsilon \longrightarrow \infty$, teremos

$$
\eta_\epsilon\left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \operatorname{div}(x) \longrightarrow \left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \operatorname{div}(x).
$$

Note também que

$$
\left|\eta_\epsilon\left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \operatorname{div}(x)\right| \leqslant \left(\sigma+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \operatorname{div}(x),
$$

e além disso, levando em conta que f^* é p' homogênea e usando a fórmula de coordenadas polares, pode-se mostrar que

$$\left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \operatorname{div}(x) \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue fazendo $\epsilon \longrightarrow \infty$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\epsilon \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \operatorname{div}(x)\ dx$$

converge para

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \operatorname{div}(x)\ dx.$$

(c) De modo análogo ao item (b), novamente pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\epsilon\ q \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-p(q-1)}{q-p}} \nabla f^*(x) \cdot x\ dx$$

converge para

$$\int_{\mathbb{R}^N} q \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-p(q-1)}{q-p}} \nabla f^*(x) \cdot x\ dx,$$

e também

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \eta_\epsilon \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \cdot x\ dx \longrightarrow 0.$$

Assim, por (2.8) e pelos itens $(a), (b)$, e (c) podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} \operatorname{div}(x)\ dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} q \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-p(q-1)}{q-p}} \nabla f^*(x) \cdot x\ dx.$$

Como $\nabla f^*(x) \cdot x = p' f^*(x) = \frac{p}{p-1} f^*(x)$, da igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} w^q dx &= \frac{1}{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-q(p-1)}{q-p}} div(x)\ dx \\
&= \frac{q}{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} q \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-p(q-1)}{q-p}} \nabla f^*(x).x\ dx \\
&= \frac{pq}{N(p-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{\frac{-p(q-1)}{q-p}} f^*(x)\ dx \\
&= \frac{pq}{N(p-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^* w^r dx,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração de (ii). □

Observação 2.1. *Do lema anterior obtemos que*

$$\frac{p(q-1)}{q(q-p)} \int_{\mathbb{R}^N} w^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x) w^r dx > 0, \tag{2.9}$$

onde p, q *e* r *satisfazem* (2.1).

De fato, do Lema (2.4) temos

$$\begin{aligned}
&\frac{p(q-1)}{q(q-p)} \int_{\mathbb{R}^N} w^q\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^* w^r\ dx = \\
&\qquad = \left(\frac{p^2(q-1)}{N(q-p)(p-1)} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} f^* w^r\ dx.
\end{aligned}$$

Assim, para obtermos (2.9) basta que

$$\left(\frac{p^2(q-1)}{N(q-p)(p-1)} - 1\right) > 0.$$

Mas

$$\left(\frac{p^2(q-1)}{N(q-p)(p-1)} - 1\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n < \frac{p^2(q-1)}{qp - q - p^2 + p}. \tag{2.10}$$

Além disto, como $\theta \leqslant 1$ obtemos que

$$n \leqslant \frac{p(q-1)}{q-p}. \tag{2.11}$$

Também temos

$$\frac{p^2(q-1)}{qp-q-p^2+p} > \frac{p(q-1)}{q-p} \quad \Leftrightarrow \quad q > p. \tag{2.12}$$

Juntando (2.11) e (2.12) obtemos (2.10) e portanto vale (2.9).

Seja $\mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{R}^N)$ o completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ na norma $\|\nabla u\|_p + \|u\|_q$. Estabeleceremos agora a desigualdade homogênea ótima de Gagliardo-Nirenberg.

Teorema 2.3. *Sejam* $1 < p < N$ *e* f *satisfazendo as propriedades* $(P.1)$, $(P.2)$, $(P.3)$ *e* $(P.4)$. *Então, para toda função* $u \in \mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{R}^N)$, *temos:*

$$\|u\|_r \leqslant A(p,q,N,f)\|f(\nabla u)\|_1^{\frac{\theta}{p}}\|u\|_q^{1-\theta} \tag{2.13}$$

onde p, q, r *e* θ *satisfazem a condição* (2.1). *Além disso a função* w *dada por* (2.7), *é uma função extremal para* (2.13).

Demonstração. Sem perda de generalidade, basta provar (2.13) para toda $u \in \mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

(a) $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, por densidade;

(b) u é não-negativa, pois $\nabla|u| = \pm\nabla u$ q.t.p. ;

(c) $\|u\|_r = 1$, por homogeneidade.

Defina $F = u^r$ e $G = w^r$ em $\mathbb{R}^N$, onde w é dada por (2.7) e considere $\nabla\varphi$ a aplicação de Brenier que transporta $F(x)dx$ à $G(x)dx$. Utilizando o Teorema (2.2) e também a desigualdade de Fenchel $x \cdot y \leqslant f(x) + f^*(y)$, com $x = -\nabla u$ e $y = u^{q-1}\nabla\varphi$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{p(q-1)}{q(q-p)}\int_{\mathbb{R}^N} w^q dx \quad &\leqslant \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u)dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^r f^*(\nabla\varphi)dx + \\ &+ \quad \frac{p(q-1)-N(q-p)}{q(q-p)}\int_{\mathbb{R}^N} u^q dx\end{aligned} \tag{2.14}$$

Utilizando f^* no lugar de b em (2.3) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^r f^*(\nabla\varphi)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^* w^r dx. \tag{2.15}$$

Substituindo esta igualdade em (2.14) e trocando u por $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{N(p-1)}{p(q-1)}} u(\lambda x)$, obtemos

$$k_1 \leqslant \lambda^{\frac{N(p-q)+p(q-1)}{q-1}} \|f(\nabla u)\|_1 + \frac{p(q-1)-N(q-p)}{q(q-p)} \lambda^{\frac{N(p-q)}{p(q-1)}} \|u\|_q^q, \tag{2.16}$$

onde

$$k_1 = \frac{p(q-1)}{q(q-p)} \int_{\mathbb{R}^N} w^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^* w^r dx > 0$$

e $\|u_\lambda\|_r = 1$, para todo $\lambda > 0$. Minimizando (2.16) em λ, obtemos que

$$k_2 \leqslant C(p,q,n) \|f(\nabla u)\|_1^{N(q-p)} \|u\|_q^{q[N(p-q)+p(q-1)]p}, \tag{2.17}$$

para toda $u \in \mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (a), (b) e (c), onde

$$k_2 = k_1^{(p-1)N(p-q)+p^2(q-1)}.$$

Assim, tomando $u \in \mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{R}^N)$ qualquer, substituindo u por $\frac{u}{\|u\|_r}$ em (2.17) e usando a definição de θ segue a desigualdade desejada. Resta-nos mostrar que w é uma função extremal para (2.13). Note que, para isso, basta verificarmos a igualdade em (2.14), pois igualdade em (2.14) implica igualdade em (2.13). Como $\|w\|_r = 1$, usando os resultados dos itens (i) e (ii) do Lema (2.4) e (2.15) em (2.14) segue que

$$\begin{aligned} \frac{p(q-1)}{q(q-p)} \int_{\mathbb{R}^N} w^q dx &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla w)dx + \int_{\mathbb{R}^N} w^r f^*(\nabla\varphi)dx + \\ &+ \frac{p(q-1)-N(q-p)}{q(q-p)} \int_{\mathbb{R}^N} w^q dx. \end{aligned} \tag{2.18}$$

e portanto w é uma função extremal para (2.13). $\square$

Note que, no teorema anterior, tomando $q = \frac{p(N-1)}{N-p}$, temos $\theta = 1$ e $r = p^*$. Assim obtemos a desigualdade homogênea ótima de Sobolev.

Teorema 2.4. *Sejam $1 < p < N$ e f satisfazendo as propriedades $(P.1)$, $(P.2)$, $(P.3)$ e $(P.4)$. Então, para toda função $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos:*

$$\|u\|_{p^*} \leqslant A(p, N, f)\|f(\nabla u)\|_1^{\frac{1}{p}}. \tag{2.19}$$

Além disso w é uma função extremal para (2.19), onde w é dada por (2.7), usando $q = \frac{p(N-1)}{N-p}$.

Como uma aplicação dos resultados anteriores, iremos calcular as constantes ótimas das desigualdades de Gagliardo-Nirenberg e Sobolev para uma família de normas.

Definição 2.4. *Sejam $1 < p < N$ e $f_\mu : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que,*

$$f_\mu(x) = \frac{1}{p}|x|_\mu^p,$$

onde

$$|x|_\mu := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}, & se \quad 1 \leqslant \mu < \infty \\ \max\{|x_i|; i = 1, 2, \ldots, n\}, & se \quad \mu = \infty. \end{cases}$$

Chamaremos f_μ de norma μ.

Para calcular as constantes ótimas, necessitaremos da transformada de Legendre da função f_μ.

Lema 2.5. *Seja f_μ como na Definição (2.4) acima. Então a transformada de Legendre de f_μ é dada por*

$$f_\mu^*(x) = \frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'},$$

onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad e \qquad \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1.$$

Demonstração. Suponha $1 < \mu < \infty$. Pela definição da transformada de Legendre, f_μ^* é p'-homegênea e além disso satisfaz as condições $(P2), (P3)$ e $(P4)$. Pelo Lemas (2.2) e (2.3), temos que

$$(p' - 1) f_\mu^*(\nabla f_\mu(x)) = f_\mu(x). \tag{2.20}$$

Note que

$$\nabla f_\mu(x) = |x|_\mu^{p-\mu}\big(|x_1|^{\mu-2}x_1, |x_2|^{\mu-2}x_2, \dots, |x_N|^{\mu-2}x_N\big).$$

Substituindo $\nabla f_\mu(x)$ em (2.20), temos que

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p}|x|_\mu^p &= f_\mu^*(\nabla f_\mu(x)) = f_\mu^*\big(|x|_\mu^{p-\mu}(|x_1|^{\mu-2}x_1, \dots, |x_N|^{\mu-2}x_N)\big) \\ &= |x|_\mu^{p'(p-\mu)} f_\mu^*\big(|x_1|^{\mu-2}x_1, \dots, |x_N|^{\mu-2}x_N\big), \end{aligned} \tag{2.21}$$

pois $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Usando o fato que $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$, segue da igualdade (2.21) que

$$f_\mu^*\left(|x_1|^{\frac{\mu}{\nu}-1}x_1, \dots, |x_N|^{\frac{\mu}{\nu}-1}x_N\right) = \frac{1}{p'}|x|_\mu^{p'\frac{\mu}{\nu}}.$$

Portanto, fazendo a mudança de variável $y_i = |x_i|^{\frac{\mu}{\nu}-1}x_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, segue que a transformada de Legendre de f_μ é dada por

$$f_\mu^*(y) = \frac{1}{p'}|y|_\nu^{p'}.$$

Como caso limite temos

$$f_1^*(x) = \frac{1}{p'}|x|_\infty^{p'} \qquad \text{e} \qquad f_\infty^*(x) = \frac{1}{p'}|x|_1^{p'}.$$

$\square$

Definição 2.5. *A função Gama (de Euler) é definida por*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Observação 2.2. *Usaremos algumas propriedades da função Gama, que poderão ser encontradas em [1].*

O próximo lema é um resultado meramente técnico que nos auxiliará no cálculo das contantes ótimas.

Lema 2.6. *Sejam μ e ν tais que $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$, então vale a seguinte igualdade*

$$\int_{S^{N-1}} \prod_{i=1}^{N} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS = \frac{2n\Gamma(\frac{1}{\nu})^N}{\nu\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)},$$

onde S^{N-1} denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$ e Γ é a função gama.

Demonstração. Seja D^{N-1} o disco unitário em $\mathbb{R}^{N-1}$.
Considere a carta $\psi : D^{N-1} \to S^{N-1}$ definida por

$$\psi(y_1, \ldots, y_{N-1}) = \big(y_1, \ldots, y_{N-1}, (1-(y_1^2+\ldots+y_{N-1}^2))^{\frac{1}{2}}\big).$$

Assim, usando o teorema de mudança de variáveis e a fórmula de coordenadas polares, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{S^{N-1}} \prod_{i=1}^{N} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS &= 2\int_{D^{N-1}} \frac{\prod_{i=1}^{N-1} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} \times (1-(y_1^2+\ldots+y_{N-1}^2))^{\frac{2-\nu}{\nu}}}{(1-(y_1^2+\ldots+y_{N-1}^2))^{\frac{1}{2}}} dy \\
&= 2\int_{D^{N-1}} \prod_{i=1}^{N-1} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} \times (1-(y_1^2+\ldots+y_{N-1}^2))^{\frac{1-\nu}{\nu}} dy \\
&= 2\int_0^1 \int_{S^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-1} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} (1-r^2)^{\frac{1-\nu}{\nu}} \times r^{\frac{(2-\nu)(N-1)}{\nu}+n-2} dS dr \\
&= 2\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{1-\nu}{\nu}} r^{\frac{2(N-1)}{\nu}-1} dr \int_{S^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-1} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS.
\end{aligned}$$

Usando indução sobre n obtemos

$$\int_{S^{N-1}} \prod_{i=1}^{N} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{1-\nu}{\nu}} r^{\frac{2(N-i)}{\nu}-1} dr. \tag{2.22}$$

Fazendo a mudança de variável, $t = r^2$, segue que

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{1}{\nu}-1} r^{\frac{2(N-i)}{\nu}-1} dr = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\nu}-1} t^{\frac{N-i}{\nu}-1} dt.$$

Como

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

para $x, y > 0$, segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\nu}-1} t^{\frac{N-i}{\nu}-1} dt = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{N-i}{\nu})\Gamma(\frac{1}{\nu})}{\Gamma(\frac{N-i+1}{\nu})}.$$

Substituindo esta igualdade em (2.22) e usando a propriedade da função gama, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, concluimos a demonstração. □

Estamos aptos agora a enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.5. *Sejam* $1 \leqslant \mu \leqslant \infty$, f_μ *como na Definição* (2.4) *e* ν *tal que* $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$. *Então as constantes ótimas da desigualdade de Gagliargo-Nirenberg são dadas, por*

$$A(p,q,N,f_1) = p^{\frac{\theta}{p}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)^{\frac{1}{N}}} \right)^{\theta} A(p,q,n) \quad ;$$

$$A(p,q,N,f_\mu) = p^{\frac{\theta}{p}} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\nu}+1)} \right)^{\theta} \left(\frac{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} \right)^{\frac{\theta}{N}} A(p,q,n) \quad ;$$

onde $A(p,q,n)$ *é conforme* (3).

Demonstração. Suponha $1 < \mu \leqslant \infty$ e considere uma função minimizadora do Teorema (2.3) com relação à função f_μ, que é dada por

$$w_\mu(x) = \left(1 + f_\mu^*(x)\right)^{-\frac{p-1}{q-p}} = \left(1 + \frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'}\right)^{\frac{p-1}{p-q}},$$

onde a última igualdade se deve ao Lema (2.5). Assim para encontrarmos a constante ótima $A(p,q,N,f_\mu)$, basta calcular as integrais da seguinte igualdade:

$$A(p,q,N,f_\mu) = \frac{\|w_\mu\|_r}{\|f_\mu(\nabla w_\mu)\|_1^{\frac{\theta}{p}}\ \|w_\mu\|_q^{1-\theta}} \tag{2.23}$$

(i) Vamos calcular $\|f_\mu(\nabla w_\mu)\|_1$. Como

$$(\nabla w_\mu)_i = \frac{p-1}{p-q}\left(1+\frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'}\right)^{\frac{q-1}{p-q}} |x|_\nu^{p'-\nu} x_i^{\nu-1}$$

e sendo $\nu = (\nu-1)\mu$, segue que

$$f_\mu(\nabla w_\mu) = \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p-q}\right)^p \left(1+\frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} |x|_\nu^{p'}.$$

Fazendo a mudança de variável

$$x_i = p'^{\frac{1}{p'}}|y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}y_i,$$

temos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f_\mu(\nabla w_\mu)dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p'}{p}p'^{\frac{N}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^N\left(\frac{p-1}{p-q}\right)^p \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(1+|y|^{\frac{2p'}{\nu}}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}|y|^{\frac{2p'}{\nu}}\prod_{i=1}^N |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}dy \\
&= \frac{p'}{p}p'^{\frac{N}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^N\left(\frac{p-1}{p-q}\right)^p \int_0^\infty \frac{r^{\frac{2(p'+n)}{\nu}-1}}{(1+r^{\frac{2p'}{\nu}})^{\frac{p(q-1)}{q-p}}}dr \int\limits_{S^{N-1}}\prod_{i=1}^N |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}dS.
\end{aligned}$$

Fazendo outra mudança de variável, $t = r^{\frac{2p'}{\nu}}$, temos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f_\mu(\nabla w_\mu)dx =$$

$$= \frac{p'}{p}p'^{\frac{N}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^N\left(\frac{p-1}{p-q}\right)^p \int_0^\infty \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{(1+t)^{\frac{p(q-1)}{q-p}}}dt \int\limits_{S^{N-1}}\prod_{i=1}^N |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}dS.$$

Aplicando a propriedade da função gama

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{2.24}$$

juntamente com o Lema (2.6) na igualdade acima, obtemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f_\mu(\nabla w_\mu)dx =$$

$$= \frac{p'^{\frac{N}{p'}}}{p} n \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \left(\frac{p-1}{p-q}\right)^p \frac{\Gamma(\frac{N}{p'}+1)\Gamma(\frac{p(q-1)}{q-p}-\frac{N}{p'}-1)}{\Gamma(\frac{p(q-1}{q-p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^N}{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)}.$$

Como

$$\frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{N}{p'} = \frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p}$$

e

$$\Gamma\left(\frac{p(q-1)}{q-p}\right) = \frac{q(p-1)}{q-p}\Gamma\left(\frac{q(p-1)}{q-p}\right),$$

segue que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f_\mu(\nabla w_\mu)dx =$$

$$= \frac{p'^{\frac{N}{p'}}}{pq} n \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \frac{q-p}{p-1} \left(\frac{p-1}{p-q}\right)^p \frac{\Gamma(\frac{N(p-1)}{p}+1)\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p})}{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^N}{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)},$$

onde também usamos o fato que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(ii) Vamos agora, calcular $\|w_\mu\|_q^q$. Usando a mudança de variável

$$x_i = p'^{\frac{1}{p'}} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} y_i,$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} w_\mu^q dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} dx \\
&= p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(1 + |y|^{\frac{2p'}{\nu}}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \prod_{i=1}^N |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dy \\
&= p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \int_0^\infty \frac{r^{\frac{2n-\nu}{\nu}}}{(1+r^{\frac{2p'}{\nu}})^{\frac{q(p-1)}{q-p}}} dr \int\limits_{S^{N-1}} \prod_{i=1}^N |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS.
\end{aligned}$$

Com uma outra mudança de variável, $t = r^{\frac{2p'}{\nu}}$, encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_\mu^q dx = p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \frac{\nu}{2p'} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{N}{p'}-1}}{(1+t)^{\frac{q(p-1)}{q-p}}} dt \int_{S^{N-1}} \prod_{i=1}^N |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS.$$

Usando a propriedade (2.24), da função gama e o Lema (2.6) chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_\mu^q dx = p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \frac{N}{p'} \frac{\Gamma(\frac{N}{p'})\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p} - \frac{N}{p'})}{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^N}{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)}.$$

Como

$$\frac{q(p-1)}{q-p} - \frac{N}{p'} = \frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{N}{p'} - 1 = \frac{p-1}{p} \frac{pq-nq+np}{q-p},$$

usando a propriedade

$$\Gamma(\frac{N}{p'}) = \frac{p'}{N}\Gamma(\frac{N}{p'}+1),$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_\mu^q dx = p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \frac{\Gamma(\frac{N(p-1)}{p}+1)\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p})}{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^N}{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)}.$$

(iii) Finalmente, vamos calcular $\|w_\mu\|_r^r$.

Novamente usando a mudança de variável

$$x_i = p'^{\frac{1}{p'}} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} y_i,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} w_\mu^r dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} dx \\
&= p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + |y|^{\frac{2p'}{\nu}}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \prod_{i=1}^N |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dy \\
&= p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \int_0^\infty \frac{r^{\frac{2n-\nu}{\nu}}}{(1+r^{\frac{2p'}{\nu}})^{\frac{p(q-1)}{q-p}}} dr \int_{S^{N-1}} \prod_{i=1}^N |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS.
\end{aligned}$$

Ainda, fazendo a mudança de variável $t = r^{\frac{2p'}{\nu}}$, obtemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} w_\mu^r dx = p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \frac{\nu}{2p'} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{N}{p'}-1}}{(1+t)^{\frac{p(q-1)}{q-p}}} dr \int\limits_{S^{N-1}} \prod_{i=1}^N |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS.$$

Da propriedade da função gama (2.24) e do Lema (2.6), temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} w_\mu^r dx = p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \frac{N}{p'} \frac{\Gamma(\frac{N}{p'})\Gamma(\frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{N}{p'})}{\Gamma(\frac{p(q-1)}{q-p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^N}{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)}.$$

Como

$$\frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{N}{p'} = \frac{q(p-1)}{q-p} - \frac{N}{p'} + 1 = \frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p} + 1,$$

e usando as propriedades $\Gamma\left(\frac{N}{p'}\right) = \frac{p'}{N}\Gamma\left(\frac{N}{p'}+1\right)$ e

$$\Gamma\left(\frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{N}{p'}\right) = \frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p}\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p}\right),$$

segue que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} w_\mu^r dx = p'^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \frac{pq-nq+np}{pq} \frac{\Gamma(\frac{N(p-1)}{p}+1)\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p})}{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^N}{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)}.$$

Como

$$\theta = \frac{N(q-p)}{(Np-(N-p)q)(q-1)} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{p(q-1)}{p-1},$$

segue, por alguns cálculos simples, que

$$\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} - \frac{1}{r} = \frac{\theta}{N}.$$

Juntando este fato com os resultados obtidos em (i), (ii) e (iii) e substituindo em (2.23) obtemos

$$A(p,q,N,f_\mu) = \frac{\left(p'^{\frac{N}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^N \frac{pq-nq+np}{pq}\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(p'^{\frac{N}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^N\right)^{\frac{1-\theta}{q}} \left(\frac{p'^{\frac{N}{p'}}}{pq} n \left(\frac{2}{\nu}\right)^N \frac{q-p}{p-1}\left(\frac{p-1}{q-p}\right)^p\right)^{\frac{\theta}{p}}} (\Lambda)^{\frac{\theta}{N}} \left(\frac{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\nu})^N}\right)^{\frac{\theta}{N}},$$

onde

$$\Lambda = \frac{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})}{\Gamma(\frac{N(p-1)}{p}+1)\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p})}.$$

Usando as igualdades

$$\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{\theta}{p'}} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\theta}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{-\frac{\theta}{p}} \qquad , \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$$

e a definição de $A(p,q,n)$ obtemos

$$A(p,q,N,f_\mu) = p^{\frac{\theta}{p}} A(p,q,n)\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\nu}+1)}\right)^{\theta}\left(\frac{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}\right)^{\frac{\theta}{N}}.$$

Fazendo $\mu \to 1$, encontramos

$$A(p,q,N,f_1) = p^{\frac{\theta}{p}} A(p,q,n)\left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma(\frac{N}{2}+1)^{\frac{1}{N}}}\right)^{\theta},$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 2.3. *As constantes ótimas da desigualdade de Sobolev são casos particulares das constantes ótimas das desigualdades de Gagliardo-Nirenberg. De fato, fazendo* $q = \frac{p(N-1)}{N-p}$ *teremos* $\theta = 1$ *e, substituindo estes fatos nas igualdades acima, encontraremos*

$$A(p,N,f_\mu) = p^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\nu}+1)}\right)\left(\frac{\Gamma(\frac{N}{\nu}+1)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}\right)^{\frac{1}{N}} A(p,n)$$

e

$$A(p,N,f_1) = p^{\frac{1}{p}}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma(\frac{N}{2}+1)^{\frac{1}{N}}}A(p,n),$$

onde $A(p,n)$ *é dada em* (5)*.*

2.2 Desigualdade homogênea logarítmica

Agora iremos estabelecer a desigualdade homogênea logarítmica ótima de Sobolev. Esta desigualdade é obtida como um caso limite da desigualdade ótima de Gagliardo-Nirenberg.

Teorema 2.6. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazendo as propriedades $(P.1), (P.2), (P.3)$ e $(P.4)$ e $1 < p \leqslant n$. Então, para toda função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, com $\|u\|_p = 1$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \log |u|^p dx \leqslant \frac{N}{p} \log \left(\mathcal{A}(p, N, f) \int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u) dx \right)$$

onde a constante ótima é dada por

$$\mathcal{A}(p, N, f) = \frac{p^{p+1}}{N e^{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-f^*(x)} dx \right)^{-\frac{p}{N}}.$$

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, com $u \neq 0$. Como $u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in \left[p, \frac{p(N-1)}{N-p}\right]$ segue do Teorema (2.3) que

$$\|u\|_r^{\frac{p}{\theta}} \leqslant A(p, q, N, f)^{\frac{p}{\theta}} \|f(\nabla u)\|_1 \|u\|_q^{\frac{p(1-\theta)}{\theta}},$$

onde $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$. Como a função logarítmica é crescente, obtemos

$$\frac{1}{\theta} \log \left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q} \right) - \log \left(A(p, q, N, f)^{\frac{1}{\theta}} \right) \leqslant \log \left(\frac{\|f(\nabla u)\|_1}{\|u\|_q^p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por definição $\theta = \frac{N(q-p)}{(q-1)(Np-nq+pq)}$ e assim, podemos reescrever

$$\theta = \left(\frac{N}{(p-1)p^2} + \sigma(q) \right) (q-p),$$

onde

$$\sigma(q) = \frac{N}{(q-1)(Np-nq+pq)} - \frac{N}{(p-1)p^2},$$

ou ainda

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{q-p} \left(\frac{p^2(p-1)}{N + \sigma(q)(p^2(p-1))} \right).$$

Como $\sigma(q) \to 0$ quando $q \to p^+$, obtemos após tomar o limite na desigualdade acima

$$\frac{p^2(p-1)}{N} \lim_{q \to p^+} \frac{1}{q-p} \log \left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q} \right) - \lim_{q \to p^+} \log \left(A(p, q, N, f)^{\frac{1}{\theta}} \right)$$

$$\leqslant \log\left(\frac{\|f(\nabla u)\|_1}{\|u\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.25}$$

Agora iremos calcular os limites restantes. Observe que

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right) &= \frac{1}{r}\log(\|u\|_r^r) - \frac{1}{q}\log(\|u\|_q^q)\\ &= \frac{q-r}{r}\log(\|u\|_q) + \frac{1}{r}\big(\log(\|u\|_r^r) - \log(\|u\|_q^q)\big).\end{aligned}$$

Do fato que $q - r = -\frac{q-p}{p-1}$ e do teorema do valor médio, segue que

$$\lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right)$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\left(\frac{q-r}{r}\log(\|u\|_q) + \frac{1}{r}\big(\log(\|u\|_r^r) - \log(\|u\|_q^q)\big)\right)\\ &= \frac{1}{p}\left\{\frac{-1}{p-1}\log(\|u\|_p) + \lim_{q\to p^+}\left[\frac{1}{q-p}\left(\frac{1}{\lambda_q}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^r - |u|^q)dx\right)\right)\right]\right\},\end{aligned}$$

onde λ_q está entre $\|u\|_r^r$ e $\|u\|_q^q$. Observando que $r \to p$ quando $q \to p^+$, novamente pelo teorema do valor médio, obtemos

$$\lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{-1}{p-1}\log(\|u\|_p) + \frac{1}{\|u\|_p^p}\lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\sigma_q}\log(|u|)(r-q)dx\right),$$

onde $\sigma_q \in (q, r)$. Pela definição de r, temos $r - q = \frac{q-p}{p-1}$ e portanto

$$\lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{-1}{p(p-1)}\log(\|u\|_p) + \frac{1}{\|u\|_p^p}\frac{1}{p(p-1)}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\log(|u|)dx\\ &= \frac{1}{p(p-1)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p}{\|u\|_p^p}\log\left(\frac{|u|}{\|u\|_p}\right)dx. \end{aligned}\tag{2.26}$$

Por outro lado, novamente pelo Teorema (2.3), temos

$$A(p,q,N,f)=\frac{\|w\|_r}{\|f(\nabla w)\|_1^{\frac{\theta}{p}}\|w\|_q^{1-\theta}},$$

onde $w(x)=\left(1+\frac{q-p}{p-1}f^*(x)\right)^{-\frac{p-1}{q-p}}$ é uma função minimizadora. Como

$$\lim_{q\to p^+} w(x)=e^{-f^*(x)}:=w_0(x)$$

temos que

$$\lim_{q\to p^+}\log\left(A(p,q,N,f)^{\frac{1}{\theta}}\right)=\lim_{q\to p^+}\left(\frac{1}{\theta}\log(A(p,q,N,f))\right)=$$

$$=-\log\left(\frac{\|f(\nabla w_0)\|_1^{\frac{1}{p}}}{\|w_0\|_p}\right)+\frac{p^2(p-1)}{N}\lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right).$$

Por cálculos análogos aos feitos para obter (2.26), encontramos

$$\lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right)=\frac{1}{p(p-1)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_0|^p}{\|w_0\|_p^p}\log\left(\frac{|w_0|}{\|w_0\|_p}\right)dx.$$

Assim

$$\lim_{q\to p^+}\log\left(A(p,q,N,f)^{\frac{1}{\theta}}\right)$$

$$=-\log\left(\frac{\|f(\nabla w_0)\|_1^{\frac{1}{p}}}{\|w_0\|_p}\right)+\frac{p}{N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_0|^p}{\|w_0\|_p^p}\log\left(\frac{|w_0|}{\|w_0\|_p}\right)dx.$$

Substituindo esta igualdade juntamente com (2.26) na desigualdade (2.25), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p}{\|u\|_p^p}\log\left(\frac{|u|^p}{\|u\|_p^p}\right)dx\leqslant \tag{2.27}$$

$$\leqslant\frac{N}{p}\log\left(\frac{\|f(\nabla u)\|_1}{\|u\|_p^p}\right)-\frac{N}{p}\log\left(\frac{\|f(\nabla w_0)\|_1}{\|w_0\|_p^p}\right)+\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_0|^p}{\|w_0\|_p^p}\log\left(\frac{|w_0|^p}{\|w_0\|_p^p}\right)dx.$$

Escolhendo $\mathcal{A}(p,N,f)$ tal que

$$\frac{N}{p}\log(\mathcal{A}(p,N,f)) =$$
$$= -\frac{N}{p}\log\left(\frac{\|f(\nabla w_0)\|_1}{\|w_0\|_p^p}\right) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_0|^p}{\|w_0\|_p^p}\log\left(\frac{|w_0|^p}{\|w_0\|_p^p}\right)dx \tag{2.28}$$

e substituindo em (2.27) concluimos que vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \log|u|^p dx \leqslant \frac{N}{p}\log\left(\mathcal{A}(p,N,f)\int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla u)dx\right),$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\|u\|_p = 1$. Agora iremos calcular a constante ótima $\mathcal{A}(p,N,f)$. Usando o Lema (2.3), obtemos

$$\|f(\nabla w_0)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\nabla w_0(x))dx = \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-pf^*(x)}f^*(x)dx.$$

Por integração por partes obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-pf^*(x)}f^*(x)dx = \frac{N}{pp'}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-pf^*(x)}dx,$$

sendo $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Dessa forma

$$\|f(\nabla w_0)\|_1 = \frac{N}{p^2}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-pf^*(x)}dx.$$

Note ainda que

$$\|w_0\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} \left(e^{-f^*(x)}\right)^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-pf^*(x)}dx.$$

Então

$$\log\left(\frac{\|f(\nabla w_0)\|_1}{\|w_0\|_p^p}\right) = \log(N) - \log(p^2).$$

Além disso, temos também que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_0|^p}{\|w_0\|_p^p}\log\left(\frac{|w_0|^p}{\|w_0\|_p^p}\right)dx = -\frac{N}{p'} - \log(\|w_0\|_p^p)$$

Portanto, de (2.28), segue que

$$\log(\mathcal{A}(p,N,f)) = -\log(N) + \log(p^2) + \frac{p}{N}\left(-\frac{N}{p'} - \log(\|w_0\|_p^p)\right),$$

o que implica

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p,N,f) &= \frac{p^2}{Ne^{p-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-pf^*(x)}dx\right)^{-\frac{p}{N}}\\ &= \frac{p^2}{Ne^{p-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-f^*(p^{\frac{1}{p'}}x)}dx\right)^{-\frac{p}{N}}.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = xp^{\frac{1}{p'}}$ obtemos

$$\mathcal{A}(p,N,f) = \frac{p^2}{Ne^{p-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-f^*(x)}dx\right)^{-\frac{p}{N}} p^{\frac{p}{p'}}.$$

Como $p^{\frac{p}{p'}+2} = p^{p+1}$ segue que

$$\mathcal{A}(p,N,f) = \frac{p^{p+1}}{Ne^{p-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-f^*(x)}dx\right)^{-\frac{p}{N}}.$$

$\square$

Capítulo 3

O Problema de Brezis-Nirenberg

Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com $N \geqslant 3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Neste capítulo iremos investigar a existência de uma solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{2^*-1} + \lambda u, & \text{em} & \Omega \\ u &> 0 & \text{em} & \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Sem perda de generalidade iremos supor que $0 \in \Omega$, pois o Laplaceano é invariante por translação. Veremos que os casos $N = 3$ e $N \geqslant 4$ levam a diferentes restrições sobre λ. Quando $N \geqslant 4$ este problema possui uma solução para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor do Laplaceano. Porém, o problema não possui solução se $\lambda \notin (0, \lambda_1)$ e Ω é estrelado. Quando $N = 3$, o problema acima é um pouco mais delicado e foi mostrado em [5] a existência de uma solução quando Ω é uma bola se, e somente se $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$. Iniciaremos provando a existência do primeiro autovalor do Laplaceano.

Lema 3.1. *Considere Δ o operador Laplaceano e Ω de classe C^∞. Então* *existe* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \{\|\nabla u\|_2^2\} = \|\nabla u_1\|_2^2.$$

Além disto $u_1 \in C^2(\Omega)$ *e satisfaz*

$$-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1.$$

Demonstração. Seja

$$\mathcal{S} = \{u \in H_0^1(\Omega) \ ; \ \|u\|_2 = 1\}$$

e os funcionais $\mathcal{J}, \mathcal{G} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados por

$$\mathcal{J}(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad \text{e} \qquad \mathcal{G}(u) := \int_\Omega u^2 dx.$$

Seja

$$\mu = \inf_{u \in \mathcal{S}} \{\mathcal{J}(u)\}.$$

Pela definição de ínfimo existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{J}(u_n) \to \mu$. Como

$$\mathcal{J}(u_n) = \|\nabla u_n\|_2^2 = \|u_n\|_{H_0^1}^2,$$

segue que existe $c_1 > 0$ tal que $\mathcal{J}(u_n) < c_1$, ou seja, $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c_1{}^{\frac{1}{2}}$. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, existe $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_1$ (a menos de subsequência). Iremos mostrar que $\mu = \mathcal{J}(u_1)$. Devemos notar primeiro que $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, então existe $u_2 \in L^2(\Omega)$ tal que $u_n \to u_2$ (a menos de subsequência). Tomando $\varphi \in L^2(\Omega)^*$ e usando a desigualdade de Poincaré, temos

$$|\varphi(u)| \leqslant c\|u\|_2 \leqslant \tilde{c}\|u\|_{H_0^1},$$

o que implica que $\varphi \in H_0^1(\Omega)^*$. Portanto

$$u_n \rightharpoonup u_1 \ \text{ em } H_0^1(\Omega) \Rightarrow \varphi(u_n) \to \varphi(u_1)$$

e também

$$u_n \to u_2 \ \text{ em } \ L^2(\Omega) \Rightarrow \varphi(u_n) \to \varphi(u_2).$$

Segue destas observações que

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2), \qquad \forall \varphi \in L^2(\Omega)^*.$$

Como

$$\|u_1 - u_2\|_2 = \sup_{\varphi \in L^2(\Omega)^*} \{|\varphi(u_1 - u_2)|\} = 0$$

podemos concluir que $u_1 = u_2$ q.t.p. em Ω. Ainda usando a convergência em $L^2(\Omega)$, temos

$$u_n \to u_1 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega) \qquad \Rightarrow \qquad \|u_n\|_2 \to \|u_1\|_2.$$

Mas $\|u_n\|_2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $(u_n) \subset \mathcal{S}$, então $\|u_1\|_2 = 1$, ou seja $u_1 \in \mathcal{S}$. Finalmente explorando a convergência fraca, obtemos

$$u_n \rightharpoonup u_1 \quad \Rightarrow \quad \|u_1\|_{H_0^1} \leqslant \underline{\lim}\, \|u_n\|_{H_0^1}.$$

Assim concluímos que

$$\mu \leqslant \mathcal{J}(u_1) = \|u_1\|_{H_0^1}^2 \leqslant \left(\underline{\lim}\, \|u_n\|_{H_0^1}\right)^2 = \left(\underline{\lim}\, \mathcal{J}(u_n)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \mu,$$

e portanto $\mathcal{J}(u_1) = \mu$. Esta igualdade nos permite usar o Teorema (1.14) e deste modo existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{J}'(u_1)v = k\mathcal{G}'(u_1)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v dx = k \int_\Omega u_1 v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

o que implica

$$\Delta u_1 = k u_1 \quad \text{ em } \ H^{-1}(\Omega).$$

Uma vez que $\|u_1\|_2 = 1$, temos $u_1 \neq 0$. Fazendo $\lambda_1 = k$ temos que u_1 é autofunção associada ao autovalor λ_1. Além disso, da Observação (1.6) temos que $u_1 \in C^2(\overline{\Omega})$. Fazendo uso do teorema da divergência encontramos

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u_1\ v)dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u_1)vdx + \int_\Omega \nabla u_1 \nabla v dx,$$

para toda $v \in C_c^\infty(\Omega)$, o que implica

$$-\int_\Omega \Delta u_1 v dx = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla v dx = \lambda_1 \int_\Omega u_1 v dx,$$

ou seja

$$\int_\Omega (-\Delta u_1 - \lambda_1 u_1) v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

o que implica

$$\Delta u_1 = \lambda_1 u_1 \quad \text{ em } \ H^{-1}(\Omega).$$

e portanto

$$-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1, \quad \text{ em } \Omega.$$

Segue do teorema (1.12) que $u_1 > 0$ em Ω. Note ainda que $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, donde $u_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$. □

Lema 3.2. *(Identidade de Pohozaev) Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução do problema* (3.1) *e Ω é de classe C^∞. Então u satisfaz a seguinte igualdade*

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x.\nu(x) ds = \lambda \int_\Omega u^2 dx,$$

onde $\nu(x)$ é o vetor normal à $\partial\Omega$ em x.

Demonstração. Multiplicando a equação em (3.1) por $\nabla u \cdot x$ e integrando temos

$$-\int_\Omega \Delta u \nabla u \cdot x\ dx = \int_\Omega u^{2^*-1} \nabla u \cdot x\ dx + \lambda \int_\Omega u\ \nabla u \cdot x\ dx.$$

Como

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla u \cdot x \nabla u) &= \nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u + \nabla u \cdot x \operatorname{div}\nabla u \\ &= \nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u + \nabla u \cdot x \; \Delta u,\end{aligned}$$

integrando esta igualdades e usando o teorema da divergência, encontramos

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot x \nabla u \cdot \nu(x) ds - \int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u \; dx = \int_{\Omega} \Delta u \nabla u \cdot x \; dx$$

Juntando a igualdade acima com esta, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u \; dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot x \nabla u \cdot \nu(x) ds \\ = \int_{\Omega} u^{2^*-1} \nabla u \cdot x \; dx + \lambda \int_{\Omega} u \; \nabla u \cdot x \; dx. \quad (3.2)\end{aligned}$$

Por outro lado, como u é solução de (3.1), então $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Considere $\gamma : [-1,1] \to \partial\Omega$ de classe C^1, com $\gamma(0) = x$. Então $u(\gamma(t)) = 0$ e

$$0 = (u(\gamma(t)))' = \nabla u(\gamma(t))\gamma'(t), \; \forall t \in (-1,1)$$

o que implica

$$\nabla u(x) \cdot \gamma'(0) = 0.$$

Pelo Lema de Hopf $\nabla u(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ e assim temos que $\nabla u(x)$ é paralelo a $\nu(x)$, logo

$$\nabla u(x) = \pm|\nabla u(x)|\nu(x).$$

Portanto

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot x \nabla u \cdot \nu(x) ds = \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu(x) ds. \quad (3.3)$$

Por outro lado

$$\nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u = \sum_{j=1}^{N} x_j \left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)_{x_j} + |\nabla u|^2.$$

Integrando a igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u \, dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \sum_{j=1}^N x_j \left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)_{x_j} dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(|\nabla u^2|) \cdot x \, dx \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Porém

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^2 x) = \nabla(|\nabla u|^2) \cdot x + |\nabla u|^2 N.$$

Assim, integrando a igualdade acima e substituindo em (3.4) obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u \, dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{N}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x.\nu(x) dx.\end{aligned}$$

Substituindo esta igualdade e (3.3) em (3.2), encontraremos

$$\left(1 - \frac{N}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu(x) ds =$$

$$= \int_\Omega u^{2^*-1}\nabla u \cdot x \, dx + \lambda \int_\Omega u \nabla u \cdot x \, dx.$$

Note ainda que

$$\int_\Omega u^{2^*-1} x \cdot \nabla u \, dx + \lambda \int_\Omega u x \cdot \nabla u \, dx =$$

$$= \frac{1}{2^*}\int_\Omega \nabla(u^{2^*}) \cdot x \, dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \nabla(u^2) \cdot x \, dx.$$

Porém

$$\operatorname{div}(u^{2^*} x) = \nabla(u^{2^*}) \cdot x + u^{2^*} N,$$

e assim

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\partial\Omega} u^{2^*} x \cdot \nu(x) dx = \int_\Omega \operatorname{div}(u^{2^*} x) dx = \\ &= \int_\Omega \nabla(u^{2^*}) \cdot x \, dx + N \int_\Omega u^{2^*} dx,\end{aligned}$$

o que implica

$$\int_\Omega \nabla(u^{2^*})\cdot x\ dx = -N\int_\Omega u^{2^*}dx$$

Analogamente temos

$$\int_\Omega \nabla(u^2)\cdot x\ dx = -N\int_\Omega u^2 dx.$$

Obtemos então

$$\left(1-\frac{N}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x\cdot\nu(x)ds =$$
$$= -\frac{N}{2^*}\int_\Omega u^{2^*}dx - \frac{N}{2}\lambda\int_\Omega u^2 dx. \tag{3.5}$$

Agora, como u é solução do problema (3.1), segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega u^{2^*}dx + \lambda\int_\Omega u^2 dx. \tag{3.6}$$

De fato, basta multiplicar a equação em (3.1) por u e usar o fato que

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u\ u)dx = \int_\Omega \Delta u\ u\ dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Substituindo (3.6) em (3.5) obtemos

$$\left(1-\frac{N}{2}\right)\int_\Omega u^{2^*}dx + \left(1-\frac{N}{2}\right)\lambda\int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2 x\cdot\nu(x)ds =$$

$$= \left(1-\frac{N}{2}\right)\int_\Omega u^{2^*}dx - \frac{N}{2}\lambda\int_\Omega u^2 dx,$$

e portanto

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2 x\cdot\nu(x)ds = \lambda\int_\Omega u^2 dx.$$

$\square$

Recordemos a seguinte definição de conjunto estrelado

Definição 3.1. *Um conjunto aberto Ω é chamado de estrelado com respeito à 0 quando, para cada $x \in \overline{\Omega}$, o segmento*

$$\{\alpha x; 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$$

está contido em $\overline{\Omega}$.

Estamos agora aptos a enunciar e demonstrar o primeiro resultado acerca do problema (3.1).

Teorema 3.1. *Seja Ω um domínio limitado, C^{∞} e estrelado com respeito a origem em $\mathbb{R}^N$. Então para $\lambda \leqslant 0$ ou $\lambda \geqslant \lambda_1$, o problema (3.1) não tem solução, onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaceano.*

Demonstração. Suponha que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ seja uma solução do problema (3.1).
(i) Considere $\lambda \leqslant 0$.
Pelo Lema (3.2) temos que

$$\lambda \int\limits_{\Omega} u^2 dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu(x) ds.$$

Como Ω é estrelado, temos que

$$x \cdot \nu(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{3.7}$$

Como $0 \in \operatorname{int} \Omega$ segue que $x \cdot \nu(x) > 0$ para todo $x \in \Omega'$, sendo $\Omega' \subset \partial\Omega$ e Ω' de medida positiva. Segue do Lema de Hopf que $\nabla u(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Portanto

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 \; dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu(x) \; ds > 0.$$

Como $u > 0$ em Ω, temos uma contradição com a hipótese que $\lambda \leqslant 0$.
(ii) Suponha $\lambda \geqslant 0$.
Sendo u uma solução de (3.1) temos

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v \; dx = \int\limits_{\Omega} u^{2^*-1} v \; dx + \lambda \int\limits_{\Omega} uv \; dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.8}$$

Do Lema (3.1), temos também que

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v \, dx = \lambda_1 \int_\Omega u_1 v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.9}$$

Assim, usando $v = u_1$ em (3.8) e $v = u$ em (3.9) obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u_1 \, dx = \int_\Omega u^{2^*-1} u_1 \, dx + \lambda \int_\Omega u u_1 \, dx,$$

e também

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u \, dx = \lambda_1 \int_\Omega u_1 u \, dx.$$

Logo, teremos que

$$\lambda_1 \int_\Omega u u_1 \, dx - \lambda \int_\Omega u u_1 \, dx > 0,$$

pois $u_1, u > 0$ em Ω. Dessa forma

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u u_1 \, dx > 0,$$

donde $\lambda_1 > \lambda$. Tomando $\lambda = \lambda_1$ obtemos uma contradição na desigualdade acima, o que finaliza a demonstração. □

Agora passaremos a investigar a existência de solução para o problema (3.1). Considere $0 < \lambda < \lambda_1$ e a seguinte constante

$$S_\lambda := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \quad ; \quad \|u\|_{2^*} = 1 \right\}.$$

Do Lema (3.1) temos

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leqslant \lambda_1^{-1} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Daí

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \geqslant (\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega |u|^2 dx \geqslant 0,$$

pois $0 < \lambda < \lambda_1$ e portanto $S_\lambda \geqslant 0$. Também é fácil ver que

$$A(2,n)^2 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 \ ; \ \|u\|_{2^*} = 1 \right\},$$

onde $A(2,n)$ é a constante ótima de Sobolev dada por (7).

Teorema 3.2. *Seja $\lambda < \lambda_1$. Se $S_\lambda < A(2,n)^{-2}$, então o problema* (3.1) *tem solução.*

Demonstração. Esta demonstração, em linha gerais, segue as idéias da demonstração do Lema (3.1). Defina

$$\tilde{\mathcal{J}}(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx \quad , \quad \tilde{\mathcal{G}}(u) = \int_\Omega |u|^{2^*} dx$$

e

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \ ; \ \|u\|_{2^*} = 1 \right\}.$$

Então

$$S_\lambda = \inf_{u \in \mathcal{H}} \{\tilde{\mathcal{J}}(u)\}.$$

Considere $(u_n) \subset \mathcal{H}$ tal que

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_n) \to S_\lambda.$$

Do Lema (3.1) segue que

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_n) \geqslant (1 - \lambda\lambda_1^{-1}) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leqslant C,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e alguma constante $C > 0$. Assim (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, donde $u_n \rightharpoonup u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (a menos de subsequência). Dessa forma

$$|\nabla u_n|^2 dx \rightharpoonup \mu \quad \text{e} \quad |u_n|^{2^*} dx \rightharpoonup \nu,$$

no sentido de medidas, onde μ e ν são medidas limitadas não-negativas. Agora, pelo Teorema (1.16), existe um conjunto J, no máximo enumerável, tal que

(i) $\nu_j > 0$, $j \in J$ tal que

$$\nu = |u_0|^{2^*}dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j};$$

(ii) $\mu_j > 0$, $j \in J$ tal que

$$\mu \geqslant |\nabla u_0|^2 dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

(iii) $A(2,n)^2 \mu_j \geqslant \nu_j{}^{\frac{2}{2^*}}$.

Daí, por (ii) acima e pelo Teorema (1.15) item (b) temos

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_0) \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u_0|^2 dx - \sum_{j \in J} \mu_j.$$

Como $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, temos $u_n \to u_0$ em $L^2(\Omega)$ (a menos de subsequencia), donde

$$\int_\Omega |u_n|^2 dx \to \int_\Omega |u_0|^2 dx.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{J}}(u_0) &\leqslant \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \lim \int_\Omega |u_n|^2 dx - \sum_{j \in J} \mu_j \\
&\leqslant \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \overline{\lim} \int_\Omega |u_n|^2 dx - \sum_{j \in J} \mu_j \\
&\leqslant \underline{\lim} \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 dx \right) - \sum_{j \in J} \mu_j \\
&= \underline{\lim}\, \tilde{\mathcal{J}}(u_n) - \sum_{j \in J} \mu_j.
\end{aligned}$$

Usando (iii) e como $\tilde{\mathcal{J}}(u_n) \to S_\lambda$, obtemos

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_0) \leqslant S_\lambda - A(2,n)^{-2} \sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{2}{2^*}}. \tag{3.10}$$

Por outro lado

$$1 = \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + \sum_{j \in J} \nu_j. \tag{3.11}$$

Queremos mostrar que $J = \emptyset$. Suponha, por contradição, que $J \neq \emptyset$. Por hipótese $S_\lambda < A(2,n)^{-2}$ e assim

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_0) < S_\lambda \left(1 - \sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{2}{2^*}}\right). \tag{3.12}$$

De (3.11) temos que

$$1 \geqslant \sum_{j\in J} \nu_j \geqslant \nu_j, \qquad \forall j \in J.$$

Como $\frac{2}{2^*} < 1$, segue que $\nu_j^{\frac{2}{2^*}} \geqslant \nu_j$, para todo $j \in J$. Substituindo a desigualdade acima em (3.12) e usando (3.11) obtemos

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_0) < S_\lambda \left(1 - \sum_{j\in J} \nu_j\right) = S_\lambda \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \leqslant S_\lambda \left(\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}},$$

e dessa forma

$$0 \leqslant \tilde{\mathcal{J}}(u_0) < S_\lambda \|u_0\|_{2^*}^2.$$

Assim, se $\|u_0\|_{2^*} = 0$ temos uma contradição. Se $\|u_0\|_{2^*} \neq 0$, então

$$\tilde{\mathcal{J}}\left(\frac{u_0}{\|u_0\|_{2^*}}\right) < S_\lambda = \inf_{u\in\mathcal{H}} \{\tilde{\mathcal{J}}(u)\},$$

o que também é uma contradição, pois $\left\|\frac{u_0}{\|u_0\|_{2^*}}\right\|_{2^*} = 1$, ou seja, $\frac{u_0}{\|u_0\|_{2^*}} \in \mathcal{H}$. Logo, devemos ter $J = \emptyset$.

Novamente por (3.11), temos que $u_0 \in \mathcal{H}$ e além disso, por (3.10), temos

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_0) \leqslant \inf_{u\in\mathcal{H}} \{\tilde{\mathcal{J}}(u)\}.$$

Portanto, existe $u_0 \in \mathcal{H}$ tal que $\tilde{\mathcal{J}}(u_0) = \inf_{u\in\mathcal{H}}\{\tilde{\mathcal{J}}(u)\}$ e pelo Teorema (1.14), existe $m > 0$ tal que

$$\tilde{\mathcal{J}}'(u_0)v = m\tilde{\mathcal{G}}'(u_0)v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Como $\nabla|u_0| = \pm\nabla u_0$, podemos supor que $u_0 \geqslant 0$, pois $\tilde{\mathcal{J}}(u_0) = \tilde{\mathcal{J}}(|u_0|)$ e assim, para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$2\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v \; dx - 2\lambda \int_\Omega u_0 v \; dx = 2^* m \int_\Omega {u_0}^{2^*-1} v \; dx.$$

Escolhendo $k > 0$, tal que $\frac{k^{2-2^*}2^*m}{2} = 1$, defina $u_1 = ku_0$ e assim obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v \; dx - \lambda \int_\Omega u_1 v \; dx = \int_\Omega {u_1}^{2^*-1} v \; dx, \; \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Da Observação (1.6) sabemos que $u_1 \in C^2(\overline{\Omega})$ e analogamente ao que foi feito no Lema (3.1) obtemos

$$-\Delta u_1 = u_1^{2^*-1} + \lambda u_1.$$

Além disso, pelo Teorema (1.12), temos que $u_1 > 0$ em Ω. $\square$

No teorema anterior, vimos que o problema (3.1) tem solução quando $\lambda < \lambda_1$ e $S_\lambda < A(2,n)^{-2}$ porém, não sabemos se esta desigualdade ocorre. O próximo teorema responde esta questão parcialmente.

Teorema 3.3. *Sejam $N \geqslant 4$ e $0 < \lambda$. Então*

$$S_\lambda < A(2,n)^{-2}.$$

Demonstração. Defina

$$Q_\lambda(u) := \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}. \tag{3.13}$$

Sejam $\delta > 0$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x| > 2\delta \\ 1, & \text{se} \quad |x| < \delta \end{cases},$$

e defina

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Dessa forma, fazendo $B_\delta := B(0,\delta)$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx &= (N-2)^2 \int_\Omega \frac{\varphi^2(x)|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx + \\
&+ 2(2-N) \int_{B_\delta^\complement \cap \Omega} (\varepsilon + |x|^2)^{1-N} \varphi(x) \nabla\varphi(x) \cdot x \; dx + \\
&+ \int_\Omega |\nabla \varphi(x)|^2 (\varepsilon + |x|^2)^{2-N} dx.
\end{aligned}$$

Agora iremos estimar as integrais do lado direito desta igualdade. Primeiro note que

$$(N-2)^2 \int_\Omega \frac{\varphi^2(x)|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx \leqslant (N-2)^2 \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N} dx,$$

A segunda integral é limitada pois

$$\int_{B_\delta^\complement \cap \Omega} (\varepsilon+|x|^2)^{1-N} |x| dx \leqslant \int_{B_\delta^\complement \cap \Omega} \frac{1}{|x|^{2N-3}} dx < \infty,$$

e, analogamente

$$\int_{B_\delta^\complement \cap \Omega} (\varepsilon + |x|^2)^{2-N} |x| dx < \infty.$$

Daí, podemos concluir que, para alguma constante $C_1 > 0$, que não depende de ε

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leqslant (N-2)^2 \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N} dx + C_1. \tag{3.14}$$

Da definição de u_ε temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx &= \int_{B_\delta} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx + \int_{B_\delta^\complement \cap \Omega} \frac{|\varphi(x)|^{2^*}}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx \geqslant \\
&\geqslant \varepsilon^{-\frac{N}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|x|^2)^N} dx - \int_{B_\varepsilon^\complement} \frac{1}{(1+|x|^2)^N} dx \right].
\end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon^{\complement}} \frac{1}{(1+|x|^2)^N}dx &= \int_{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty}\int_{S^{N-1}} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^N}dSdr\\ &\leqslant \int_{S^{N-1}} dS \int_{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{r^{N-1}}{r^{2n}}dr = C\varepsilon^{\frac{N}{2}},\end{aligned}$$

onde S^{N-1} denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$ e $C > 0$ é uma constante.

Logo, utilizando o teorema do valor médio, chegamos a

$$\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \geqslant \varepsilon^{-\frac{N+2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|x|^2)^N}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} - C_2\varepsilon > 0, \tag{3.15}$$

para alguma constante $C_2 > 0$.

Finalmente, vejamos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx &= \int_{B_\delta} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx + \int_{B_\delta^{\complement}\cap\Omega} \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx\\ &\geqslant \varepsilon^{-\frac{N}{2}+2}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|x|^2)^{N-2}}dx - \int_{B_\varepsilon^{\complement}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{N-2}}dx\right].\end{aligned}$$

Para $n > 4$ obtemos

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx \geqslant \varepsilon^{-\frac{N}{2}+2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|x|^2)^{N-2}}dx - C_3 > 0, \tag{3.16}$$

para alguma constante C_3.

Por outro lado, para $N = 4$ obtemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx &\geqslant \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{(1+|x|^2)^2}dx\\ &= C\int_0^{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{(1+r^2)^2}r^3 dr\\ &\geqslant C_4 - C_5\ln(\varepsilon),\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde C_4 e C_5 são constantes positivas.

Da igualdade (3.13), utilizando (3.14) e (3.15), obtemos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leqslant \frac{(N-2)^2\varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}dx + C_1 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon|^2dx}{\varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{dx}{(1+|x|^2)^N}\right)^{\frac{2}{2^*}} - C_2\varepsilon}.$$

Observe agora que a função $U(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$ é uma função extremal para (7), donde obtemos a seguinte igualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|U(x)|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} = A(2,n)^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U(x)|^2dx,$$

ou seja,

$$A(2,n)^{-2} = \frac{(N-2)^2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|x|^2)^N}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} := \frac{a}{b}. \tag{3.18}$$

Dessa forma, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que

$$\frac{(N-2)^2\varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}dx + C_1 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon|^2dx}{\varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{dx}{(1+|x|^2)^N}\right)^{\frac{2}{2^*}} - C_2\varepsilon} - A(2,n)^{-2} < 0.$$

De fato, para $n > 4$, utilizando (3.16) e (3.18), com $d = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|x|^2)^{N-2}}dx$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}a + C_1 - \lambda\varepsilon^{\frac{-N+4}{2}}d + \lambda C_3}{\varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}b - C_2\varepsilon} - \frac{a}{b}\\
= \; &\frac{\varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}ab + C_1b - \lambda b\varepsilon^{\frac{-N+4}{2}}d + \lambda C_3 b - \varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}ab - C_2\varepsilon a}{\varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}b^2 - bC_2\varepsilon}\\
= \; &\frac{\varepsilon^{\frac{4-N}{2}}}{\varepsilon^{\frac{-N+2}{2}}}\left(\frac{C_1b\varepsilon^{\frac{N-4}{2}} - \lambda bd + \lambda bC_3\varepsilon^{\frac{N-4}{2}} - C_2\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}a}{b^2 - bC_2\varepsilon^{\frac{N}{2}}}\right) < 0,
\end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Por outro lado, para $N = 4$, utilizando (3.17) e (3.18) obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon^{-1}a + C_1 - \lambda C_4 + \lambda C_5 \ln(\varepsilon)}{\varepsilon^{-1}b - C_2\varepsilon} - \frac{a}{b} \\
= & \frac{\varepsilon^{-1}ab + C_1 b - \lambda C_4 b + \lambda C_5 b \ln(\varepsilon) - \varepsilon^{-1}ab + C_2\varepsilon a}{b\left(\varepsilon^{-1}b - C_2\varepsilon\right)} \\
= & \frac{(C_1 - \lambda C_4)b + \lambda C_5 b \ln(\varepsilon) + C_2 a\varepsilon}{\varepsilon^{-1}\big(b^2 - C_2 b\varepsilon^2\big)} < 0,
\end{aligned}
$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Portanto $Q_\lambda(u_\varepsilon) < A(2,n)^{-2}$, donde $S_\lambda < A(2,n)^{-2}$. $\square$

Considere agora $N = 3$ e $\Omega = B(0,1) := B_1$. Vimos pelo Lema (3.1), que o problema de autovalores

$$
\begin{cases}
-\Delta u = \lambda u, & \text{em } B_1 \\
u > 0, & \text{em } B_1 \\
u = 0, & \text{sobre } \partial B_1
\end{cases}
\tag{3.19}
$$

tem solução. Assim, existem λ_1 o primeiro autovalor e $u_1 \in C^2(\overline{B_1})$ autofunção associada à λ_1 resolvendo o problema (3.19). Vimos pelo Teorema (1.13) que soluções desse tipo de problema são radiais e assim podemos considerar $u_1(x) = v(r)$, onde $r = |x|$. Então o problema (3.19) pode ser reescrito como

$$
\begin{cases}
-v'' - \frac{2}{r}v' = \lambda v \\
v(1) = 0, \qquad v'(0) = 0
\end{cases}
. \tag{3.20}
$$

Neste caso $\lambda_1 = \pi^2$ é o primeiro autovalor e $v(r) = \frac{\operatorname{sen}(\pi r)}{r}$ uma autofunção correspondente.

Teorema 3.4. *Sejam $N = 3$ e $\frac{\lambda_1}{4} < \lambda$ e considere $\Omega = B_1 = B(0,1)$. Então*

$$S_\lambda < A(2,3)^{-2}.$$

Demonstração. Tome $\varphi(r) = \cos(\frac{\pi}{2}r)$. Para $r = |x|$ e $\varepsilon > 0$ defina

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dessa forma

$$\int_{B_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_{B_1} \frac{\varphi'^2(r)r}{\varepsilon + |x|^2} dx - 2\int_{B_1} \frac{\varphi(r)\varphi'(r)r}{(\varepsilon + |x|^2)^2} dx + \int_{B_1} \frac{\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx.$$

Utilizando a fórmula de coordenadas polares, com $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ |x| = 1\}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx &= \int_0^1 \int_{S^2} \frac{\varphi'^2(r)r^2}{\varepsilon + r^2} dS dr - 2\int_0^1 \int_{S^2} \frac{\varphi(r)\varphi'(r)r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dS dr \\ &+ \int_0^1 \int_{S^2} \frac{\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dS dr.\end{aligned}$$

Fazendo $\omega = \int\limits_{S^2} dS$, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx &= \omega \left[\int_0^1 \frac{\varphi'^2(r)r^2}{\varepsilon + r^2} dr - 2\int_0^1 \frac{\varphi(r)\varphi'(r)r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dr \right. \\ &+ \left. \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \right].\end{aligned}$$

Note que

$$2\int_0^1 \frac{\varphi(r)\varphi'(r)r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dr = -\int_0^1 \varphi^2(r) \left[\frac{3r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} - \frac{4r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} \right] dr,$$

donde

$$\int_{B_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \omega \int_0^1 \frac{\varphi'^2(r)r^2}{\varepsilon + r^2} dr + 3\varepsilon\omega \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} dr.$$

Porém, note ainda que

$$\int_0^1 \frac{\varphi'^2(r)r^2}{\varepsilon + r^2} dr \leqslant \int_0^1 \varphi'^2(r) dr$$

e além disso

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} \leqslant \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{y^2}{(1 + y^2)^2} dy.$$

Logo

$$\int_{B_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leqslant \omega \int_0^1 \varphi'^2(r)dr + 3\omega\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y^2)^2}dy. \tag{3.21}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} |u_\varepsilon|^{2^*} dx &= \int_{B_1} \frac{\varphi^6(r)}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx \\
&= \omega \int_0^1 \frac{\varphi^6(r) r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\
&= \omega \int_0^1 \frac{(\varphi^6(r) - 1) r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr + \omega \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr.
\end{aligned}$$

Mas, para alguma constante $C > 0$

$$\left| \frac{\varphi^6 - 1}{r^2} \right| < C.$$

pois, por L'Hôpital

$$\lim_{r \to 0} \frac{\varphi^6 - 1}{r^2} = \lim_{r \to 0} \frac{-6\cos^5(\frac{\pi}{2}r)\text{sen}(\frac{\pi}{2}r)}{2\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}r} = \frac{-6\pi}{4}.$$

Logo obtemos

$$\omega \int_0^1 \frac{(\varphi^6(r) - 1) r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \leqslant C \int_0^1 \frac{r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr.$$

Dessa maneira

$$\int_{B_1} |u_\varepsilon|^{2^*} dx \geqslant \omega \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr - C \int_0^1 \frac{r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr,$$

e utilizando o teorema do valor médio, obtemos

$$\left(\int_{B_1} |u_\varepsilon|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \omega^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y^2)^3} dy \right)^{\frac{1}{3}} - C_1 \varepsilon, \tag{3.22}$$

para alguma constante C_1. Finalmente, vejamos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} |u_\varepsilon|^2 dx &= \omega \int_0^1 \frac{\varphi^2(r) r^2}{\varepsilon + r^2} dr \\
&= \omega \int_0^1 \varphi^2(r) dr + \omega \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)(r^2 - 1)}{\varepsilon + r^2} dr \\
&= \omega \int_0^1 \varphi^2(r) dr + \omega \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{\varphi^2(y\varepsilon^{\frac{1}{2}})(y^2\varepsilon - 1)}{1 + y^2} dy,
\end{aligned}$$

o que implica, para alguma constante $C_2 > 0$

$$\int_{B_1} |u_\varepsilon|^2 dx \geqslant \omega \int_0^1 \varphi^2(r)dr + C_2\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{3.23}$$

Substituindo os valores encontrados em (3.21), (3.22) e (3.23) na igualdade (3.13) obtemos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leqslant \frac{3\omega\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y^2)^2}dy + \omega\mathcal{K} + C_2\varepsilon}{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left(\omega\int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y^2)^3 dy}\right)^{\frac{1}{3}} + C_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.24}$$

onde

$$\mathcal{K} = \int_0^1 \varphi'^2(r)dr - \lambda\omega \int_0^1 \varphi(r)^2 dr.$$

Uma vez que a função $U(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}$ é uma função extremal para (7), segue que

$$A(2,3)^{-2} = \frac{3\omega\int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y^2)^3}dy}{\left(\omega\int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y^2)^3}dy\right)^{\frac{1}{3}}} := \frac{a}{b}. \tag{3.25}$$

Assim, de (3.24) e (3.25) chegamos a

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leqslant A(2,3)^{-2} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\omega\mathcal{K}b + \varepsilon^{\frac{1}{2}}C_1 b - \varepsilon^{\frac{1}{2}}aC_2\right)}{b(b+C_2\varepsilon)}, \tag{3.26}$$

Uma vez que

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 t \; dt = \int_0^1 \cos^2 t \; dt$$

e tomamos $\varphi(r) = \cos(\frac{\pi}{2}r)$, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \int_0^1 \frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2}r)dr - \lambda\int_0^1 \cos^2(\frac{\pi}{2}rdr) \\ &= \left(\frac{\pi^2}{4} - \lambda\right)\int_0^1 \cos^2(\frac{\pi}{2}r)dr < 0, \end{aligned}$$

pois

$$\lambda > \frac{\pi^2}{4} = \frac{\lambda_1}{4}.$$

Logo, de (3.26) temos que

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) < A(2,3)^{-2},$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e portanto segue o resultado. $\square$

Teorema 3.5. *Sejam* $N = 3$ *e* $\lambda \leqslant \frac{\lambda_1}{4}$ *e considere* $\Omega = B_1 = B(0,1)$*. Então o problema* (3.1) *não tem solução.*

Demonstração. O caso $\lambda \leqslant 0$ já foi considerado no Teorema (3.1). Consideremos então o caso $0 < \lambda \leqslant \frac{\lambda_1}{4}$. Suponha, por absurdo, que u seja solução do problema (3.1), então u é uma função radial e podemos considerar

$$u(x) := v(r), \qquad \text{com } r = |x|.$$

Logo o problema (3.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} -v'' - \frac{2}{r}v' = v^5 + \lambda v, & r \in (0,1) \\ v(1) = v'(0) = 0 \end{cases}. \tag{3.27}$$

Seja $\psi \in C^\infty((0,1))$, tal que $\psi(0) = 0$. Note que

$$\psi(1)\left(v'(1)\right)^2 = \int_0^1 \left(r^2\psi(v')^2\right)' dr =$$

$$= 2\int_0^1 r\psi(v')^2 dr + \int_0^1 r^2\psi'(v')^2 dr + 2\int_0^1 r^2\psi v'v'' dr.$$

Multiplicando (3.27) por $-2r^2\psi v'$ e substituindo na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \psi(1)\left(v'(1)\right)^2 &= 2\int_0^1 r\psi(v')^2 dr + \int_0^1 r^2\psi'(v')^2 dr - 4\int_0^1 r\psi(v')^2 dr \\ &- 2\int_0^1 r^2\psi v'v^5 dr - 2\lambda\int_0^1 r^2\psi v v' dr \end{aligned} \tag{3.28}$$

Além disso

$$\begin{aligned} 0 = -\frac{1}{3}\int_0^1 \left(r^2\psi v^6\right)' dr &= -\frac{2}{3}\int_0^1 r\psi v^6 dr - \frac{1}{3}\int_0^1 r^2\psi' v^6 dr \\ &- 2\int_0^1 r^2\psi v^5 v' dr, \end{aligned}$$

donde

$$-2\int_0^1 r^2\psi v^5 v' dr = \frac{2}{3}\int_0^1 r\psi v^6 dr + \frac{1}{3}\int_0^1 r^2\psi' v^6 dr \tag{3.29}$$

Observe também que

$$\begin{aligned} 0 = -\lambda\int_0^1 \left(r^2\psi v^2\right)' dr &= -2\lambda\int_0^1 r\psi v^2 dr - \lambda\int_0^1 r^2\psi' v^2 dr \\ &- 2\lambda\int_0^1 r^2\psi v v' dr, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-2\lambda\int_0^1 r^2\psi v v' dr = 2\lambda\int_0^1 r\psi v^2 dr + \lambda\int_0^1 r^2\psi' v^2 dr \tag{3.30}$$

Substituindo (3.29) e (3.30) em (3.28) chegamos a

$$\int_0^1 (v')^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr - \frac{1}{2}(v'(1))^2\psi(1) =$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 v^6(2r\psi + r^2\psi')dr - \frac{1}{2}\lambda\int_0^1 v^2(2r\psi + r^2\psi')dr. \tag{3.31}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) v v'\right]' dr = \frac{1}{2}\int_0^1 r^2\psi'' v v' dr - \int_0^1 \psi v v' dr \\ &+ \int_0^1 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)(v')^2 dr + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) v v'' dr. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Note que

$$0 = \int_0^1 (r^2 v^2\psi'')' dr = 2\int_0^1 r v^2\psi'' dr + 2\int_0^1 r^2 v v'\psi'' dr + \int_0^1 r^2 v^2\psi''' dr,$$

ou seja,

$$\int_0^1 r^2 v v'\psi'' dr = -\int_0^1 r v^2\psi'' dr - \frac{1}{2}\int_0^1 r^2 v^2\psi''' dr. \tag{3.33}$$

Além disso

$$0 = -\frac{1}{2}\int_0^1 (rv^2\psi')'dr = -\frac{1}{2}\int_0^1 v^2\psi' dr - 2\int_0^1 rvv'\psi' dr - \frac{1}{2}\int_0^1 rv^2\psi'' dr,$$

e assim,

$$\int_0^1 rv^2\psi'' dr = -\int_0^1 v^2\psi' dr - 4\int_0^1 rvv'\psi' dr. \tag{3.34}$$

Observe ainda que

$$0 = \int_0^1 (v^2\psi)'dr = 2\int_0^1 vv'\psi dr + \int_0^1 v^2\psi' dr,$$

isto é,

$$\int_0^1 v^2\psi' dr = -2\int_0^1 vv'\psi dr. \tag{3.35}$$

Juntando as igualdades (3.33), (3.34) e (3.35) chegamos a

$$\int_0^1 vv'\psi dr = \frac{1}{2}\int_0^1 r^2vv'\psi'' dr + \frac{1}{4}\int_0^1 r^2v^2\psi''' dr - \frac{1}{2}\int_0^1 rvv'\psi' dr \tag{3.36}$$

Multiplicando (3.27) por $\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)v$, substituindo na igualdade (3.32) e considerando ainda (3.36) chegamos a

$$\int_0^1 (v')^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)dr - \frac{1}{4}\int_0^1 v^2r^2\psi''' dr =$$

$$= \int_0^1 v^6\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)dr + \lambda\int_0^1 v^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)dr. \tag{3.37}$$

Combinando (3.31) e (3.37) obtemos

$$\frac{1}{2}(v'(1))^2\psi(1) + \frac{2}{3}\int_0^1 v^6(r\psi - r^2\psi')dr = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\psi''' + \lambda\psi'\right)v^2r^2 dr.$$

Uma vez que $0 < \lambda \leqslant \frac{\pi^2}{4}$ e considerando $\psi(r) = \operatorname{sen}((4\lambda)^{\frac{1}{2}}r)$, temos

$$\psi(1) \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{4}\psi''' + \lambda\psi' = 0$$

e assim
$$\int_0^1 v^6(r\psi - r^2\psi')dr \leqslant 0.$$
Porém

$$\begin{aligned} r\psi - r^2\psi' &= r\ \mathrm{sen}((4\lambda)^{\frac{1}{2}}r) - r^2\cos((4\lambda)^{\frac{1}{2}}r)(4\lambda)^{\frac{1}{2}} \\ &= r[\ \mathrm{sen}(\theta) - \theta\cos(\theta)] > 0, \end{aligned}$$

para $r > 0$, sendo $\theta = (4\lambda)^{\frac{1}{2}}r$. Logo
$$\int_0^1 v^6(r\psi - r^2\psi')dr > 0,$$
o que é um absurdo e portanto, segue o resultado. □

Referências Bibliográficas

[1] E. Artin. *The Gamma Function.* 1964.

[2] T. Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *Journal Differential Geometry*, 11(4):573–598, 1976.

[3] Y. Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-value functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(4):375–417, 1991.

[4] H. Brezis. *Analisi funzionale.* Liguori Editore Srl, 1986.

[5] H. Brezis and L. Nirenberg. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Communications on Pure an Applied Mathematics*, XXXVI:437–477, 1983.

[6] J. Ceccon and M. Montenegro. General optimal euclidean Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Annals of the Brazilian Academy of Sciences*, 77(4):581–587, 2005.

[7] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, and C. Villani. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Advances in Mathematics*, 182:307–332, 2004.

[8] M. Del Pino and J. Dolbeault. The optimal Euclidean L^p-Sobolev lo-

garithmic inequality. *Journal of Functional Analysis*, 197(1):151–161, 2003.

[9] L.C. Evans. *Partial differential equations.* American Mathematical Society Providence, RI, 1998.

[10] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press, Inc., 1992.

[11] I. Gentil. The general optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations. *Journal of Functional Analysis*, 202(2):591–599, 2003.

[12] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, 2001.

[13] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1):45–121 and 145–201, 1985.

[14] R.J. McCann. A convexity principle for interacting gases. *Adv.Math.*, 128(1):153–179, 1997.

[15] Robert C. McOwen. *Partial differential equations: methods and applications.* Prentice Hall, RI, 1995.

[16] J. Serrin. Local behavior of solutions of quasi-linear equations. *Acta Mathematica*, 111(1):247–302, 1964.

[17] G. Talenti. Best constants in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 110(IV):353–372, 1976.

[18] M. Willem. *Minimax Theorems.* Birkhauser, 1996.